LES ONDELETTES

par

Jean Paul NUWACU

mémoire présenté au Département de mathématiques en vue de l'obtention
du grade de maîtrise en sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, août 2015

le 15 Août 2015

Le jury a accepté le mémoire de M. Jean Paul Nuwacu dans sa version finale.

Membres du jury

M. Jean-Marc Belley
Directeur
Département de mathématiques

Mme Virginie Charette
Membre
Département de mathématiques

Mme Vasilisa Shramchenko
Président-rapporteur
Département de mathématiques

SOMMAIRE

Le sujet "Ondelettes" est constitué de plusieurs domaines de mathématiques pures et appliqués. Il a contribué à la compréhension de beaucoup de problèmes dans diverses sciences, dans l'ingénierie et d'autres disciplines. Il comprend parmi ses notables succès, la compression standard des images d'empreintes digitales basée sur les ondelettes adoptée par la FBI en 1993 et $JPEG2000$, la norme actuelle pour la compression des images.

Dans le présent travail, nous introduisons les ondelettes unidimensionnelles dans le premier chapitre. Dans le second chapitre, nous parlons des Ondelettes en plusieurs dimensions dans l'espace euclidien. Dans troisième chapitre, nous introduisons les ondelettes continues et quelques applications. À la fin de ce travail nous voyons d'autres applications et quelques remarques finales.

REMERCIEMENTS

Je tiens premièrement à remercier mon directeur de maîtrise, M. Jean Marc Belley, fidèle à ses habitudes, a été d'une disponibilité irréprochable. Ses conseils, sa rigueur scientifique et ses encouragements mathématiques tout au long de ces deux dernières années m'ont été d'une très grande utilité. Je dis aussi merci à tous les professeurs qui m'ont ensiegné pour les connaissances qu'ils m'ont transmises.

Je voudrais aussi remercier tous mes confrères et consœurs de travail du local D4-1026 qui ont su m'épauler tout au long de la réalisation de ce mémoire. Je voudrais aussi exprimer ma gratitude à toute ma famille et surtout à ma future épouse pour leur soutien moral. Ma maitrise a été rendu possible grâce au soutien financier du Programme Canadien de Bourse de la Francophonie (PCBF) auquel je dis merci.

En fin, que tout personne qui a contribué d'une manière où d'une autre pour l'accomplissement de ce travail trouve ici ma gratitude.

Jean Paul NUWACU

Sherbrooke, Août, 2015

TABLE DES MATIÈRES

SOMMAIRE **iii**

REMERCIEMENTS **iv**

TABLE DES MATIÈRES **v**

LISTE DES FIGURES **ix**

INTRODUCTION **1**

CHAPITRE 1 — Les Ondelettes dans $L^2(\mathbb{R})$ **6**

1.1 Analyse Multi-Résolution 10

1.1.1 Sous espace V_j et la fonction échelle 10

1.1.2 Relation d'échelle 14

1.1.3 Ondelettes mères et bases d'ondelettes 18

1.1.4 De l'AMR à l'ondelette mère 20

1.1.5 Orthonormalité des translatées de ϕ 20

1.1.6 Filtres 22

1.1.7 Expression du filtre m_g pour $g \in W_0$ 24

1.2 Les propriétés des fonctions de carré intégrables translatées dans $L^2(\mathbb{R})$. 37

1.2.1 Espace Invariant par Translation (EIT) 37

1.2.2 Les propriétés des fonctions de carré intégrables translatées dans $L^2(\mathbb{R})$ 38

1.2.3 Espace dual de $\mathcal{T}_\phi$ 43

1.3 Approximation non-linéaire 46

1.3.1 Décroissance des coefficients et approximation 47

1.3.2 Erreur de l'approximation non-linéaire 50

CHAPITRE 2 — Les Ondelettes dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ **54**

2.1 Analyse Multi-Résolution 55

2.1.1 Espace d'ondelettes 56

2.1.2 Fonction l'échelle et les espaces d'ondelettes 57

2.2 Ondelettes séparables dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ 59

2.2.1 Analyse Multi-Résolutions 59

2.2.2 Produit tensoriel 59

2.2.3 Base d'ondelettes séparables dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ 60

2.3 Ondelettes à dilatations composées 64

2.3.1 Analyse Multi-Résolution 64

2.3.2 Exemple 1 : Ondelette de type-Haar associée à la matrice de quinconce 66

2.3.3 Exemple 2 et observations générales 70

2.4 Approximation non-linéaire en plusieurs dimensions 73

2.4.1 Système d'ondelettes de cisaillement (OC) 80

2.4.2 Exemple de construction de ψ_1 et ψ_2 83

CHAPITRE 3 — Les Ondelettes continues **86**

3.1 Notation et définition 86

3.1.1 Groupe général affine 87

3.1.2 Mesure de Haar 87

3.2 Ondelettes continues 88

3.2.1 Transformée en ondelette continue en 1 dimension 89

3.2.2 Condition d'admissibilité 90

3.3 Transformée de Fourier, transformée en ondelettes continues en plusieurs dimensions 90

3.3.1 Condition d'admissibilité 91

3.4 Caractérisation de régularité locale des fonctions 93

3.4.1 Régularité Hölderienne 94

3.5 Transformée continue en Ondelette de Cisaillement (OC) 100

3.5.1 Condition d'admissibilité 102

3.5.2 Caractérisation des points de discontinuités par les OC en 2D . . 103

CONCLUSION **107**

BIBLIOGRAPHIE **112**

LISTE DES FIGURES

1.1 La fonction échelle de A.Haar [3]. 7

1.2 Les espaces W_j [20] 19

1.3 Ondelette de Haar [3]. 32

2.1 Région fondamentale R_0 et ses images par B [36]. 67

2.2 Illustration de l'action de l'inverse de la matrice *quinconce* q sur les triangles R_i [36]. 68

2.3 Les ensembles échelles pour les 6 éléments du groupe engendrés par l'action des éléments de B sur le triangle R [36]. 70

2.4 Domaines de l'ondelette fondamentale pour les 6 éléments du groupe [36]. 71

2.5 Les supports de fréquence des éléments du système d'OC sont les paires de régions trapézoïdales définies à différentes échelles et orientations, dépendant de j et l, respectivement. La figure montre les supports de fréquence de deux éléments représentatifs : la région plus sombre correspond à $j = 0,\ l = 0$ et la région claire à $j = 1,\ l = 1$ [17] 83

2.6 (a) La fonction $|\widehat{\psi}_1(\xi)|^2$ (trait plein), pour $\xi > 0$; le côté négatif est symétrique. Cette fonction est obtenue, après mise à l'échelle, à partir de la somme de la fonctions fenêtre $b^2(\xi) + b^2(2\xi)$ (lignes pointillées). (b) La fonction $\widehat{\psi}_2(\xi)$ [24]. 85

3.1 Support des OC $\widehat{\psi}_{a,s,t}$ (Dans le domaine de Fourier) pour différentes valeurs de a et de s [38]. 101

3.2 Région générale S avec une bordure lisse par morceaux ∂S. La transformée en OC continues de $B = \chi_S$ a une décroissance asymptotique rapide sauf si la variable t est localisée sur le contour S et la variable de cisaillement s correspond à la direction normale à l'instant t ; dans ce cas $\widetilde{W}_\psi B(a, s, t) \backsim a^{\frac{3}{4}}$, quand $a \longrightarrow 0$. Le même taux de décroissance lente se produit au niveau des points d'angle, pour les directions normales [25]. 106

INTRODUCTION

Dans ces dernières années, les familles des fonctions

$$\psi_{jk}(x) = |a|^{\frac{j}{2}}(a^j x - b), \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \tag{1}$$

obtenues à partir d'une fonction simple $\psi(x)$ par les opérations de dilatations et de translations se sont révélées être un outil dans de nombreux domaines de mathématiques purs et appliqués. D'après Grossmann et Morlet [23], nous appelons de telles fonctions des " Ondelettes ".

Les techniques basées sur les dilatations et les translations ne sont pas certainement nouvelles. Néanmoins, l'introduction des familles d'ondelettes spéciaux semble avoir conduit à des nombreux résultats (voir par exemple [44], [48], [2]). En outre, les ondelettes sont utiles dans de nombreux domaines de mathématiques purs et appliqués. Elles sont utilisées par exemple pour l'analyse du son [37] et ont conduit à un nouvel algorithme avec nombreuses caractéristiques intéressantes pour la décomposition des données visuelles [40]. Elles semblent très prometteuses pour la détection des bords et des singularités [22]. Il est donc juste de supposer qu'elles aurons des applications dans d'autres directions.

Selon les types d'applications, différentes familles d'ondelettes peuvent être choisies.

On peut par exemple choisir de laisser les paramètre a et b dans l'équation (1) varier d'une façon continue sur le groupe $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ où $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\ \{0\}$. On peut aussi choisir, comme dans la première partie de ce mémoire à restreindre les paramètres a et b dans l'équation (1) à un sous espace discret. Dans ce cas on fixe le paramètre de dilatation $a > 1$ et le paramètre de translation $b \neq 0$. La famille ainsi obtenue est

$$\psi_{jk}(x) = |a|^{\frac{j}{2}}(a^j x - kb), \quad a, b \in \mathbb{R}, j, k \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Quelques exemples beaucoup plus surprenant de base d'ondelettes orthonormées on fait surface récemment. Le premier a été construit par Y. Meyer [44] en 1985. Il a construit une fonction $\psi(x) \in C^\infty$ à décroissance rapide telle que la famille des fonctions $\psi_{jk}(x)$ définies dans (2) (avec $a = 2$ et $b = 1$) constituent une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$. La base de Y. Meyer se révèle comme une base inconditionnelle pour tous les espaces de Sobolev, pour l'espace de Hardy-Littlewood H_1, pour l'espace de Besov, etc (voir [44]).

En 1986, S. Mallat et Y. Meyer [43], [39] ont réalisé que les différentes constructions à base d'ondelettes peuvent tous être réalisées à partir d'une " Analyse Multi-Résolution " tel que développée dans ce mémoire. Celle-ci est un cadre dans lequel les fonctions $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ peuvent être considérées en tant que limite d'approximations successives, $f = \lim\limits_{j \to -\infty} P_j f$. Les coefficients d'ondelettes $\langle \psi_{jk}, f \rangle$, avec j fixe, correspondent alors à la différence entre les deux approximations successives $P_{j-1} f$ et $P_j f$.

Dans ce travail, nous introduisons dans le premier chapitre les outils mathématiques nécessaires à la construction des ondelettes discrète en une dimension dans le cadre de la méthode générale de l' Analyse Multi-Résolution. Après avoir décrit les propriétés qui découlent de l'Analyse Multi-Résolution, nous montrons que pour une Analyse Multi-Résolution avec une fonction échelle ϕ, il existe une fonction 1-périodique $m_0(\xi)$

connue sous le nom de "filtre passe-bas" ainsi que le " filtre passe-haut $m_1(\xi)$ " qui lui est associée produisant ainsi les relations entre deux échelles différentes [1]. Des concepts d'espaces invariants par translation et leurs propriétés ainsi que l'approximation non-linéaire des fonction en utilisant les ondelettes, sont abordés.

Dans la deuxième partie, nous construisons les ondelettes discrètes en plusieurs dimensions et nous montrons les différences entre une base orthonormée construite en une dimension avec celle construite en plusieurs dimensions à travers les ondelettes séparables et les ondelettes à dilatations composées [36]. Dans cette même partie, la théorie d'approximation non-linéaire des fonction est développée en utilisant les ondelettes en plusieurs dimensions comme illustrée par Vyacheslav Zadasky dans [50]. On y introduit aussi la théorie des ondelettes de cisaillement (voir [24], [26]).

Dans le troisième chapitre, nous traitons les ondelettes continues en passant la condition d'admissibilité de Calderón [4]. Nous introduisons aussi la caractérisation de régularité locale des fonctions en utilisant la régularité Hölderienne [49]. Néanmoins l'étude de régularité des fonctions en utilisant les ondelettes en plusieurs dimensions montre que la transformée en ondelettes continues peut détecter l'emplacement des point de singularité mais pas leur géométries [49]. Pour cela nous introduisons dans cette même partie les ondelettes de cisaillement continues [25] où la matrice de dilatation utilisée est un produit d'une matrice de cisaillement et d'une matrice de dilatation d'échelle parabolique permettent ainsi de détecter l'emplacement des points de singularité ainsi que leur géométrie.

Pour la suite, commençons par établir les définitions et notations de base qui seront

utilisées dans la suite. L'ensemble suivant des fonctions mesurables

$$L^2(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \ \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty\}$$

muni du produit scalaire

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$$

est un espace de Hilbert avec norme

$$\|f\|_2 = \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

La suite dénombrable $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ forme une base de $L^2(\mathbb{R})$ si pour chaque élément $f \in L^2(\mathbb{R})$ il existe une suite (unique) $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ telle que $f = \sum_n c_n f_n$ dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$ et s'il existe deux constantes positives A et B telles que

$$A \parallel f \parallel^2 \leq \sum_n |c_n| \leq B \parallel f \parallel^2 .$$

La transformée de Fourier est un opérateur unitaire qui transforme la fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ en une fonction $\mathcal{F}f$ aussi notée $\widehat{f}$ définie par

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i\xi x}dx$$

quand $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et par les condition du théorème de Plancherel-Parseval (voir Annexe) pour la fonction générale $f \in L^2(\mathbb{R})$. Nous nous référons au couple temps-fréquence (x, ξ). Notons aussi que la fonction $\widehat{f}$ est de carrée intégrable. En effet $\mathcal{F}$ applique $L^2(\mathbb{R})$ bijectivement sur lui-même. L'inverse $\mathcal{F}^{-1}$ de la transformée $\mathcal{F}$ est définie par

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = \check{g}(x) = \int_{\mathbb{R}} g(\xi)e^{2\pi i\xi x}d\xi.$$

Les fonctions $\{e_k(x) = e^{2\pi ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ sont 1-périodiques et forment une base orthonormale de $L^2(\mathbb{T})$ où $\mathbb{T}$ est est un cercle centré à l'origine et de circonférence 1 et peut être identifié par n'importe lequel de ces ensembles $(0,1]$ ou $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$,...(tous ayant la mesure 1). Nous notons les séries de Fourier de f, 1-périodique et dans $L^2(\mathbb{T})$ par :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, e_k\rangle_{\mathbb{T}}\, e_k \sim f \text{ où } \langle f, e_k\rangle_{\mathbb{T}} = \int_{\mathbb{T}} f\overline{e_k} \text{ et } k \in \mathbb{Z}.$$

Le produit de convolution de deux fonctions réelles ou complexes f et g, est une autre fonction, qui se note généralement $f * g$ et qui est définie par :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t).g(x-t)dt$$

CHAPITRE 1

Les Ondelettes dans $L^2(\mathbb{R})$

Considérons les opérateurs suivants sur $L^2(\mathbb{R})$.

• Les translations : $T_k \quad (k \in \mathbb{Z})$ définies pour toute $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ par

$$T_k(\psi(x)) = \psi(x-k).$$

• Les dilatations : $D_j \quad (j \in \mathbb{Z})$ définies pour tout $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ par

$$D_j(\psi(x)) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x).$$

Les opérateurs D_j et T_k ne sont pas commutatifs. En effet, on a le résultat suivant

$$D_j T_k = T_{2^j k} D_j.$$

Fixons $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ et construisons la famille des fonctions $\{\psi_{jk} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ où

$$\psi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k)$$

pour tous $j, k \in \mathbb{Z}$. Dans cette section, nous montrons que ces fonctions que nous appellerons *ondelettes* bénéficient d'un grand nombre de propriétés permettant à différents types de fonctions d'être exprimées à l'aide d'une base d'ondelettes appropriée. Il existe

deux fonctions qui jouent un rôle majeur dans l'analyse des ondelettes : la fonction échelle notée ϕ et l'ondelette mère elle-même notée ψ. Chacune d'elles génère une base qui peut être utilisée pour décomposer une fonction.

Exemple 1.1 *La fonction échelle de Haar [3].*

Historiquement la première ondelette notée $\psi = \psi^H$ fut présentée en 1910 par Haar [28]. Elle est définie par

$$\psi^H = \chi_{[0,\frac{1}{2})} - \chi_{[\frac{1}{2},1)}.$$

Par contre, la fonction échelle de Haar est définie par :

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; 0 \leq x < 1 \\ 0 & ailleurs. \end{cases} \tag{1.1}$$

L'on constate que

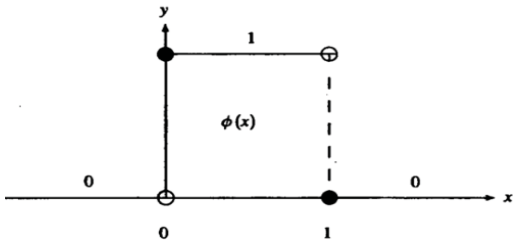

Figure 1.1 – La fonction échelle de A.Haar [3].

$$\phi(x) = \phi(2x) + \phi(2x-1)$$

et que

$$\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x-1).$$

Exemple 1.2 *La fonction échelle de Shannon[14].*

Un autre exemple d'ondelette simple est celle de Shannon. Elle est apparue dans les année 1940 et est définie par

$$\psi^S = \chi_S$$

où $S = \left[-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ Par contre la fonction échelle de Shannon est donnée par la fonction sinus cardinal :

$$\phi(x) = \mathrm{sinc}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin(x\pi)}{x\pi} = \frac{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}}{2\pi i x}.$$

En procédant à une translation d'ordre k le long de l'axe des x et une dilatation d'ordre j nous obtenons :

$$\phi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j x - k) = 2^{\frac{j}{2}}\frac{\sin\pi(2^j x - k)}{\pi(2^j x - k)} = 2^{\frac{j}{2}}\frac{e^{\pi i(2^j x - k)} - e^{-\pi i(2^j x - k)}}{2\pi(2^j x - k)}.$$

Or la transformée de Fourier de la fonction ϕ donne [8]

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi}(\xi) = \widehat{\mathrm{sinc}}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x\pi)}{x\pi}\cos(2\pi x\xi)dx - i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(x\pi)}{x\pi}\sin(2\pi x\xi)dx.
\end{aligned}$$

La dernière intégrale est nulle, puisque la fonction intégrée est impaire. Comme $\sin(p)\cos(q) = \frac{1}{2}[\sin(p+q) + \sin(p-q)]$, on a

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathrm{sinc}}(\xi) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi x(1+2\xi)}{\pi x}dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi x(1-2\xi)}{\pi x}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi x(1+2\xi)}{\pi x(1+2\xi)}d(x\pi(1+2\xi)) + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi x(1-2\xi)}{\pi x(1-2\xi)}d(x\pi(1-2\xi)).
\end{aligned}$$

En notant s le signe de $1+2\xi$ et s' le signe de $1-2\xi$, et en faisant les changements de variables $u = \pi x(1+2\xi)$ et $v = \pi x(1-2\xi)$, on obtient :

$$\widehat{\mathrm{sinc}}(\xi) = \frac{1}{2}\int_{-s\infty}^{s\infty}\mathrm{sinc}(u)du + \frac{1}{2}\int_{-s'\infty}^{s'\infty}\mathrm{sinc}(v)dv.$$

On distingue les cas suivants :

1. Si $2\xi < -1$ ou $2\xi > 1$, alors $ss' = -1$, donc, les deux dernières intégrales s'annulent et on a :

$$\widehat{\text{sinc}}(\xi) = 0.$$

2. Si 2ξ est contenu dans l'intervalle]-1, 1[, alors $s = s' = 1$ et du fait que $\int_{\mathbb{R}} \text{sinc}(x)du = \pi$, on obtient que :

$$\widehat{\text{sinc}}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(u)du = \pi.$$

3. En fin, on traite le cas $2\xi = -1$ et $2\xi = 1$:
   - Si $2\xi = -1$, alors on obtient :

$$\widehat{\text{sinc}}(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(4\xi)d(4\xi) = \frac{\pi}{2}.$$

   - Si $2\xi = 1$, alors on obtient :

$$\widehat{\text{sinc}}(\xi)(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(4\xi)d(4\xi) = \frac{\pi}{2}.$$

Donc, on a :

$$\widehat{\phi}(\xi) = \widehat{\text{sinc}}(\xi) = \begin{cases} \pi & si \quad -1 \leq 2\xi < 1 \\ \frac{\pi}{2} & si \quad 2\xi = \pm 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

ce qui donne

$$\widehat{\phi}(\xi) = \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(\xi) = \begin{cases} \pi & si \quad -\frac{1}{2} \leq 2\xi < \frac{1}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

dans $L^2(\mathbb{R})$. Ce calcul sera utilisé dans les sections **1.1.6** et **1.2.1**.

1.1 Analyse Multi-Résolution

Dans cette section nous présentons une méthode générale introduite par S. Mallat, R. Coifman [40] et Y. Meyer [45] pour la construction des ondelettes. Une Analyse Multi-Résolution (notée AMR) définit des opérations linéaires permettant d'analyser une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ à différentes échelles $V_j, j \in \mathbb{Z}$. Mise au point vers la fin de l'année 1986 , elle constitue un outil permettant de regarder la fonction f de "très près" ou de "très loin". Ce "zoom" est effectué à l'aide d'une fonction échelle ϕ dont les versions translatées dans le temps engendrent un espace d'approximation V_0. L'approximation de la fonction f dans V_0 est obtenue en faisant sa projection sur cet espace. La fonction f est également projetée sur un espace perpendiculaire afin de conserver le plus d'information possible. La fonction générant ce deuxième espace sera appelée ondelette et sera notée ψ. Ceci ne constitue que la première étape de l'AMR.

1.1.1 Sous espace V_j et la fonction échelle

Dans cette partie nous utilisons l'AMR pour approximer une fonction par des ondelettes. Pour un sous espace de référence V_0 et pour une fonction de référence que nous appelons *fonction échelle* $\phi(x) \in V_0$ telle que $V_0 = \overline{\{T_k\phi(x) : k \in \mathbb{Z}\}}$, définissons l'espace $V_j = D_j V_0$ comme étant l'espace engendré par la famille

$$\{D_{jk}\phi(x) = 2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j x - k) : \phi(x) \in V_0, \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

pour j fixe.

Définition 1.1 *L'Analyse Multi-Résolution (AMR) consiste en une suite $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ de sous espaces fermés de $L^2(\mathbb{R})$ et d'une fonction échelle $\phi \in V_0$ tel que les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *Les espaces V_j sont emboîtés. C'est à dire $V_j \subset V_{j+1}$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$.*
2. *(séparation) L'intersection de tous les V_j est la fonction nulle. C'est à dire $\cap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.*
3. *(densité) L'espace $L^2(\mathbb{R})$ est l'union fermée de tout les V_j. C'est à dire, l'adhérence par rapport à $\|.\|_2$ donne $\overline{\cup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$.*
4. *$V_{j+1} = D_1 V_j$ pour tous $j \in \mathbb{Z}$. Les espaces V_j et V_{j+1} sont semblables. C'est à dire, si l'espace V_j est engendré par $\{\phi_{j,k}(x), k \in \mathbb{Z}\}$, alors l'espace V_{j+1} est engendré par $\{\phi_{j+1,k}(x), k \in \mathbb{Z}\}$. Ainsi V_{j+1} est engendré par les fonctions $\phi_{j+1,k}(x) = \sqrt{2}\phi_{j,k}(2x)$. Donc $f(x) \in V_j$ si et seulement si $f(2x) \in V_{j+1}$. Ainsi on obtient $f(2^{-j}x) \in V_0$.*
5. *La famille de fonctions $\{T_k\phi(x) = \phi(x-k) : k \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de V_0. De plus on suppose que $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx \neq 0$.*

Pour illustrer cette définition utilisons l'exemple suivant

Exemple 1.3 *AMR de Haar.*

La fonction échelle ϕ est donnée par (1.1). L'espace des fonctions échelles d'ordre j, noté V_j, est engendré par l'ensemble

$$\{\cdots, \phi(2^j x + 2), \phi(2^j x + 1), \phi(2^j x), \phi(2^j x - 1), \phi(2^j x - 2), \cdots\}.$$

V_j est donc l'ensemble des fonctions constantes par morceaux et de support fini dont l'ensemble des discontinuités est dans

$$\{\cdots \frac{-2}{2^j}, \frac{-1}{2^j}, 0, \frac{1}{2^j}, \frac{2}{2^j}, \cdots\}.$$

Une fonction dans l'espace V_0 est constante par morceau et de support fini. Donc l'ensemble de ses points de discontinuités est contenu dans $\mathbb{Z}$. Toute fonction dans V_0 est

aussi contenue dans V_1, dont les éléments sont fonctions constantes par morceaux dont l'ensemble des discontinuités est dans :

$$\{\cdots \frac{-2}{2}, \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \cdots\}.$$

On voie donc que $V_0 \subset V_1$. Il en est de même pour $V_1 \subset V_2$ et ainsi de suite. En général on a :

$$\cdots V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \cdots \subset V_j \subset V_{j+1} \cdots .$$

et donc la première condition de L'AMR est vérifie.

Concernant la deuxième condition, notons que j peut être négatif ou positif dans la définition de V_j. Si $f \in V_j$, alors f peut être écrite comme combinaison linéaire de $\phi(2^j x - k)$ $(k \in \mathbb{Z})$ qui sont constantes sur les intervalles $[0, \frac{1}{2^j}) + \frac{k}{2^j} = [\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}]$. Lorsque $j \longrightarrow -\infty$ les intervalles deviennent arbitrairement grands. D'autre part, le support de f (i.e l'adhérence de l'ensemble où f est non nulle) doit rester fini. Donc , si f appartient à tous les V_j comme $j \longrightarrow -\infty$, alors l'image de f doit être zéro.

Pour la troisième condition, considérons deux faits tirés de la théorie de la mesure [46]. Premièrement, une fonction dans $L^2(\mathbb{R})$ peut être approximée dans $L^2(\mathbb{R})$ par une fonction réelle continue à support compact dans $\mathbb{R}$. Deuxièmement, toute fonction réelle continue à support compact peut être approximée uniformément par des fonctions étagées dont les discontinuités sont multiples de 2^{-j} pour un j suffisamment grand. Une telle fonction étagée, appartient à V_j et donc on a la troisième condition. (Cette condition de densité signifie donc que l'approximation d'une fonction f par un élément de V_j capture éventuellement tous les détails de f quand $j \longrightarrow \infty$).

La quatrième condition est évidente. Montrons la dernière condition de l'AMR. V_0 est généré par $\phi(x)$ et ses translatées. Les fonctions $\phi(x-k)$ $(k \in \mathbb{Z})$ ont chacune la norme unité dans $L^2(\mathbb{R})$ car

$$\|\phi(x-k)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} (\phi(x-k))^2 dx = \int_{k}^{k+1} 1 dx = 1.$$

De plus, si $j \neq k$, alors $\phi(x-j)$ et $\phi(x-k)$ ont des supports disjoints.

$$\langle \phi(x-j), \phi(x-k) \rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-j)\phi(x-k) dx = 0, \qquad j \neq k.$$

et donc l'ensemble $\{\phi(x-k) : k \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormale pour V_0. De plus $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = 1 \neq 0$.

Théorème 1.4 *Supposons que $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ est une AMR avec fonction échelle ϕ. Alors pour tout $j \in \mathbb{Z}$, l'ensemble des fonctions*

$$\{\phi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j x - k) : \ k \in \mathbb{Z}\} \tag{1.2}$$

est une base orthonormale pour V_j.

Démonstration. Toute fonction $f(x) \in V_j$ peut être écrite comme combinaison linéaire des $\phi(2^j x - k)$ $(k \in \mathbb{Z})$. Par la condition 4. de l'AMR, la fonction $f(2^{-j}x)$ appartient à l'espace V_0 et $f(2^{-j}x)$ est une combinaison linéaire unique des $\phi(x-k) : (k \in \mathbb{Z})$. En remplaçant x par $2^j x$ on voit que $f(x)$ est une combinaison linéaire unique des $\phi(2^j x - k) : (k \in \mathbb{Z})$.

Il reste à montrer que la famille $\phi_{j,k} : \ k \in \mathbb{Z}$ est une base orthonormale. Dans ce but, posons

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 0 & si \ \ l \neq k \\ 1 & si \ \ l = k \end{cases}$$

et montrons que

$$2^j \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(2^j x - k)\overline{\phi(2^j x - l)}dx = \delta_{kl}. \tag{1.3}$$

Pour établir (1.3), on fait le changement de variables $y = 2^j x$ pour obtenir

$$2^j \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(2^j x - k)\overline{\phi(2^j x - l)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y - k)\overline{\phi(y - l)}dy.$$

L'intégral à droite est égale à δ_{lk} en vertu de la définition de l'AMR en sa condition 5. ■

1.1.2 Relation d'échelle

Dans le théorème suivant, nous montrons les équations centrales de l'AMR. On les appelle les relations d'échelle.

Théorème 1.5 *Si $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$est une AMR avec fonction d'échelle ϕ, alors on a la relation d'échelle suivante :*

$$\phi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k \phi(2x - k) \tag{1.4}$$

où

$$p_k = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\overline{\phi(2x - k)}dx. \tag{1.5}$$

De plus, on a

$$\phi(2^{j-1}x - l) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_{k-2l}\phi(2^j x - k) \tag{1.6}$$

que l'on peut aussi écrire comme

$$\phi_{j-1,l} = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_{k-2l}\phi_{jk} \tag{1.7}$$

où

$$\phi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j x - k). \tag{1.8}$$

Démonstration. Notons que $\phi \in V_0 \subset V_1$ et donc il existent $\tilde{p}_k \in \mathbb{C}$, $(k \in \mathbb{Z})$ telles que $\phi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{p}_k \phi_{1k}(x)$. Puisque $\{\phi_{1k} : k \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormale de V_1, les $\tilde{p}_k$ peuvent être obtenus par

$$\tilde{p}_k = \langle \phi, \phi_{1k} \rangle_{L^2} = 2^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\overline{\phi(2x-k)}dx.$$

Or

$$\phi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{p}_k \phi_{1k}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{p}_k 2^{\frac{1}{2}} \phi(2x-k)$$

et donc on a

$$\phi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k \phi(2x-k)$$

où $p_k = 2^{\frac{1}{2}} \tilde{p}_k$.

Pour montrer (1.7) partons de la relation $\phi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j x - k)$ et utilisons le fait que $\phi(x) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \tilde{p}_l 2^{\frac{1}{2}} \phi(2x-l)$. On a :

$$\begin{aligned} \phi_{jk}(x) &= 2^{\frac{j}{2}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \tilde{p}_l 2^{\frac{1}{2}} \phi(2(2^j x - k) - l) \\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \tilde{p}_l 2^{\frac{j+1}{2}} \phi(2^{j+1}x - (2k+l)). \end{aligned}$$

En tenant compte que $p_l = 2^{\frac{1}{2}} \tilde{p}_l$ (c'est à dire $2^{-\frac{1}{2}} p_l = \tilde{p}_l$) on a :

$$\begin{aligned} \phi_{jk}(x) &= 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} p_l \phi_{j+1,l+2k}(x) \\ &= 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} p_l \phi_{j+1,l+2k}(x) \\ &= 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} p_{l-2k} \phi_{j+1,l}(x) \end{aligned}$$

cela donne

$$\phi_{j-1,k}(x) = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_{k-2l} \phi_{j,k}(x)$$

qui est le résultat désiré. ■

Le théorème suivant contient certaines identités pour p_k qui seront importantes pour la suite.

Théorème 1.6 *Supposons que $\{V_j; j \in \mathbb{Z}\}$ est une AMR avec une fonction échelle ϕ. Alors on a les identités suivantes.*

1. $\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_{k-2l}\overline{p_k} = 2\delta_{l0}$;
2. $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |p_k|^2 = 2$;
3. $\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k = 2$;
4. $\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_{2k} = 1$ *et* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_{2k+1} = 1$.

où p_k est donné par (1.5).

Démonstration. La première identité provient de (1.4), car tenant compte que $\{\phi(x-k), k \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée, on a

$$\begin{aligned}
2\delta_{l0} &= 2\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-l)\overline{\phi}(x)dx \\
&= 2\int_{-\infty}^{\infty} \Big[\sum_{k'\in\mathbb{Z}} p_{k'}\phi(2(x-l)-k')\Big]\Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{p}_k\overline{\phi}(2x-k)\Big]dx \\
&= 2\sum_{k,k'\in\mathbb{Z}} p_{k'}\overline{p}_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x-(k'+2l))\overline{\phi}(2x-k)dx.
\end{aligned}$$

Or $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi(2x-(k'+2l))\overline{\phi}(2x-k)dx = 0$ sauf si $k'+2l=k$ (c'est à dire $k'=k-2l$). Donc on a

$$\begin{aligned} 2\delta_{l0} &= 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_{k-2l}\overline{p}_k \int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi(2x-k)\overline{\phi}(2x-k)dx \\ &= 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_{k-2l}\overline{p}_k \frac{1}{2} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_{k-2l}\overline{p}_k. \end{aligned}$$

La deuxième identité est obtenue de la première en posant $l=0$. Pour la troisième identité, nous utilisons (1.4). On a

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k \int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi(2x-k)dx.$$

En faisant un changement de variable $t=2x-k$ dans le membre de droite, on a

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi(t)dt.$$

Le facteur $\int \phi(t)dt \neq 0$ dans le membre de droite peut être simplifié par le $\int \phi(x)dx$ dans le membre de gauche, ce qui termine la démonstration de la troisième identité.

Pour montrer la quatrième identité, partons de première identité $\big(\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} p_{k-2l}\overline{p_k} = 2\delta_{l0}\big)$, et remplaçons l par $-l$. Ensuite, faisons une somme sur l. On a :

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_{k-2l}\overline{p_k} = 2\sum_{l\in\mathbb{Z}} \delta_{l0} = 2.$$

En divisant la somme sur k en termes pairs et impairs, on a

$$\begin{aligned} 2 &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_{2k+2l}\overline{p_{2k}} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_{2k+1+2l}\overline{p_{2k+1}} \right) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} p_{2k+2l} \right) \overline{p_{2k}} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} p_{2k+1+2l} \right) \overline{p_{2k+1}}. \end{aligned}$$

En remplaçant l par $l-k$, les deux sommes sur l dans le terme de droite deviennent $\sum_{l\in\mathbb{Z}} p_{2l}$ et $\sum_{l\in\mathbb{Z}} p_{2l+1}$, respectivement. Donc,

$$\begin{aligned} 2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{p}_{2k} \sum_{l\in\mathbb{Z}} p_{2l} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{p}_{2k+1} \sum_{l\in\mathbb{Z}} p_{2l+1} \\ &= |\sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{p}_{2k}|^2 + |\sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{p}_{2k+1}|^2. \end{aligned}$$

En posant $E = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{p}_{2k}$ et $O = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{p}_{2k+1}$, la dernière égalité peut s'écrire $E^2 + O^2 = 2$. De plus, en divisant la troisième égalité de l'énoncé du théorème en termes pairs et impairs, on a $E + O = 2$. Les deux équations en E et en O ont la seule solution $E = O = 1$, ce qui termine la démonstration de la quatrième identité. ■

Étant donnée une AMR $((V_j), \phi)$, une fonction ψ telle que la famille $\{\psi(x-k); k \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormale pour $W_0 = V_1 \ominus V_0$ est appelée *ondelette mère*. Soit donc ψ une une telle fonction. On a

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x)\overline{\psi(2x-k)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\overline{\psi(x-k)}dx = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \phi \in V_0.$$

1.1.3 Ondelettes mères et bases d'ondelettes

Nous allons maintenant décrire comment une AMR peut être utilisé pour construire une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$. Nous assumons que les conditions de la définition 1.1 sont satisfaites. Pour $j \in \mathbb{Z}$, nous notons W_j le complement orthogonal de V_j dans V_{j+1}. Soit α_j la projection orthogonale de V_{j+1} sur W_j. Des conditions *1.*, *2.* et *3.* de la définition 1.1 il suit que chaque fonction réelle $f \in L^2(\mathbb{R})$ peut être représentée par $f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_j f$, où $\alpha_j f \perp \alpha_{j'} f$ pour $j \neq j'$; ainsi

$$L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j}. \tag{1.9}$$

Les espaces W_j satisfont les mêmes conditions de dilations que V_j, c'est à dire

$$f \in W_0 \Leftrightarrow [x \mapsto f(2^j x)] \in W_j. \tag{1.10}$$

Dans le but d'obtenir une base orthonormée $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ pour $L^2(\mathbb{R})$, il est nécessaire de trouver $\psi \in W_0$ telle que $\{\psi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de l'espace W_0 ; cela implique, d'après les propriétés de dilatation (1.9) et (1.10) que $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$. Donc toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ peut être écrite comme :

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k}\rangle \psi_{j,k}$$

par rapport à la norme $\|.\|_2$. Soit maintenant

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j x - k); k \in \mathbb{Z}$$

où $\{\phi_{0,k}; k \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de V_0. Comme $\overline{V_0 \oplus (\bigoplus_{j=0}^{\infty} W_j)} = L^2(\mathbb{R})$, une autre base orthonormale pour $L^2(\mathbb{R})$ est :

$$\{\psi_{j,k}(x) : j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\phi_{0,k}(x) : k \in \mathbb{Z}\}.$$

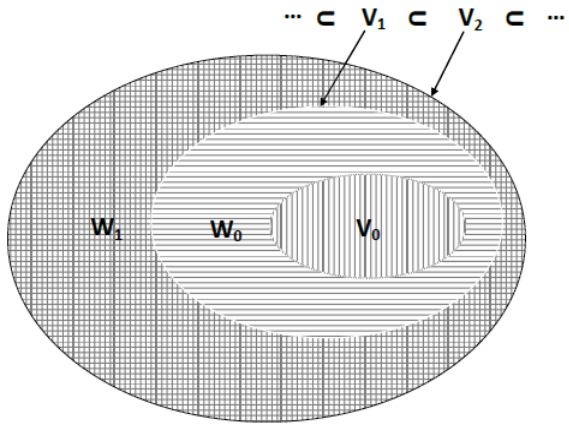

Figure 1.2 – Les espaces W_j [20]

1.1.4 De l'AMR à l'ondelette mère

D'après la section précédente, l'ondelette mère ψ produit une base orthonormée $\{\psi_{j,k}(x) : j, k \in \mathbb{Z}\}$ pour $L^2(\mathbb{R})$. Cela nous permettra d'écrire toute fonction dans $L^2(\mathbb{R})$ en termes de $\psi_{j,k}$. Plus fondamentalement , étant donnée une AMR $((V_j), \phi)$, existe-t-il $\psi \in W_0 = V_1 \cap V_0^{\perp}$ telle que $\{\psi(x-k), k \in \mathbb{Z}\}$ soit une base orthonormée pour W_0. Après certaines observations générales nous allons montrer dans la suite que l'ondelette mère est obtenue à partir de la fonction d'échelle par :

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\sqrt{2})\overline{c_{1-k}}(-1)^k \phi(2x-k)$$

où

$$c_k = \langle \phi(x), \sqrt{2}\phi(2x-k) \rangle = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\overline{\phi(2x-k)}dx, \quad k \in \mathbb{Z}$$

sont les coefficients de ϕ dans V_1 par rapport à la base $\{\sqrt{2}\phi(2x-k) : k \in \mathbb{Z}\}$. Notre approche consiste à spécifier les propriétés non pas de ψ mais de $\widehat{\psi}$, et d'utiliser la transformée inverse de Fourier pour obtenir l'expression de ψ à partir de celle de $\widehat{\psi}$.

1.1.5 Orthonormalité des translatées de ϕ

Dans cette section nous nous referons à [34].

Lemme 1.7 *Soit $\widehat{f}$ dans $L^2(\mathbb{R})$ la transformée de Fourier de la fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$. Si la famille $\{f(x-k) : \quad k \in \mathbb{Z}\}$ est orthonormée dans $L^2(\mathbb{R})$ alors*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}}^{\infty} |\widehat{f}(\xi + n)|^2 = 1 \qquad p.p. \tag{1.11}$$

Démonstration. La transformée de Fourier de $f(x-k)$ est $\widehat{f}(\xi)e^{-2i\pi\xi k}$. Par l'identité de Plancherel ($\langle f,\varphi\rangle = \langle \widehat{f},\widehat{\varphi}\rangle$) il s'en suit que :

$$\begin{aligned}\delta_{k0} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{f(x-k)}dx = \langle f(x), f(x-k)\rangle \\ &= \langle \widehat{f}(\xi), \widehat{f}(\xi)e^{-2i\pi\xi k}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 e^{2i\pi\xi k}d\xi\end{aligned}$$

où δ_{k0} est le symbole de Kronecker delta. En transformant $\int_{-\infty}^{\infty}$ en une somme, nous obtenons :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 e^{2i\pi\xi k}d\xi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{n\frac{1}{2}}^{(n+1)\frac{1}{2}} |\widehat{f}(\xi)|^2 e^{2i\pi\xi k}d\xi.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\delta_{k0} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{n\frac{1}{2}}^{(n+1)\frac{1}{2}} |\widehat{f}(\xi)|^2 e^{2i\pi\xi k}d\xi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{0}^{1} |\widehat{f}(\xi+n)|^2 e^{2i\pi\xi k}d\xi \\ &= \int_{0}^{1} \big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(\xi+n)|^2\big) e^{2i\pi\xi k}d\xi.\end{aligned}$$

La dernière égalité résulte du théorème de la convergence monotone. La conséquence de l'équation précédente est que pour la fonction 1-périodique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(\xi+n)|^2$, ses coefficients de Fourier c_n sont nulles pour $n \neq 0$ et $c_0 = 1$. Donc

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(\xi+k)|^2 = 1 \quad p.p. \tag{1.12}$$

■

L'inverse de ce résultat n'est pas vrai. Puisque les translatées d'une fonction échelle forment une base orthonormée pour V_0, nous avons le corollaire suivant.

Corollaire 1.8 *Si $\widehat{\phi}$ est la transformée de Fourier d'une fonction échelle $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ pour une AMR, alors*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi+n)|^2 = 1 \quad p.p.$$

1.1.6 Filtres

Soit $((V_j), \phi)$ une AMR. Toute fonction $g \in V_1$ peut être écrite en terme des éléments de la base orthonormée $\{\sqrt{2}\phi(2x-k) : k \in \mathbb{Z}\}$ pour V_1 comme :

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sqrt{2} b_k \phi(2x-k).$$

Sachant que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |b_k|^2 < \infty$, nous pouvons former une fonction 1-périodique

$$m_g(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{b_k}{\sqrt{2}} e^{-2\pi i k\xi} \in L^2(\mathbb{T}) \tag{1.13}$$

où $\mathbb{T}$ représente le groupe du cercle unité. La fonction $m_g(\xi)$ est appelé *Filtre* associé à la la fonction g. Le filtre m_0 associé à la fonction échelle est souvent appelé *Filtre passe-bas* associé à ϕ. Nous avons l'identité de filtre suivant.

Théorème 1.9 *Si $((V_j), \phi)$ est une AMR et $g \in V_1$, alors*

$$\widehat{g}(2\xi) = m_g(\xi)\widehat{\phi}(\xi) \quad p.p. \tag{1.14}$$

Démonstration. On a

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sqrt{2} b_k \phi(2x-k)$$

pour une suite $\{b_k : k \in \mathbb{Z}\}$ de carré sommable. La transformée de Fourier de $\phi(2x-k)$ étant $\frac{1}{2}e^{-2i\pi k\frac{\xi}{2}}\widehat{\phi}(\frac{\xi}{2})$ on a :

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(\xi) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sqrt{2} b_k \frac{1}{2} e^{-2i\pi k\frac{\xi}{2}} \widehat{\phi}(\frac{\xi}{2}) \\
&= \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \sqrt{2} b_k \frac{1}{2} e^{-2i\pi k\frac{\xi}{2}}\Big)\widehat{\phi}(\frac{\xi}{2}) = m_g(\frac{\xi}{2})\widehat{\phi}(\frac{\xi}{2})
\end{aligned}$$

ou encore

$$\widehat{g}(2\xi) = m_g(\xi)\widehat{\phi}(\xi).$$

■

Ce résultat nous donne l'identité d'échelle qui suit.

Théorème 1.10 *Soit* $((V_j), \phi)$ *une AMR. Le filtre* $m_0(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{b_k}{\sqrt{2}} e^{-2\pi i k\xi}$ *associé à* ϕ *satisfait à :*

$$1 = |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \frac{1}{2})|^2 \quad p.p. \tag{1.15}$$

où $m_0(\xi) \neq 0$ *ou* $m_0(\xi + \frac{1}{2}) \neq 0$ *presque partout* $\xi \in \mathbb{R}$

Démonstration. Par (1.14), on a $\widehat{\phi}(\xi) = m_0(\frac{\xi}{2})\widehat{\phi}(\frac{\xi}{2})$ et donc , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\delta_{0k} &= \langle \phi(x), \phi(x-k)\rangle = \langle \widehat{\phi}(\xi), \widehat{\phi}(\xi)e^{-2i\pi k\xi}\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(\xi)\overline{\widehat{\phi}(\xi)}e^{2i\pi k\xi}d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}(\xi)|^2 e^{2i\pi k\xi}d\xi \\
&= \int_0^1 \Big(\sum_{l=-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}(\xi+l)|^2\Big)e^{2i\pi k\xi}d\xi = \int_0^1 \Big(\sum_{l=-\infty}^{\infty} |m_0(\frac{\xi+l}{2})\widehat{\phi}(\frac{\xi+l}{2})|^2\Big)e^{2\pi i k\xi}d\xi.
\end{aligned}$$

En faisant la sommation sur les l pairs et impairs séparément et en utilisant l'équation (1.12), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\delta_{0k} &= \int_0^1 \Big(\sum_{l=-\infty}^{\infty} |m_0(\frac{\xi}{2})\widehat{\phi}(\frac{\xi}{2}+l)|^2 + \sum_{l=-\infty}^{\infty} |m_0(\frac{\xi+1}{2})\widehat{\phi}(\frac{\xi+1}{2}+l)|^2\Big)e^{2\pi i k\xi}d\xi \\
&= \int_0^1 \Big(|m_0(\frac{\xi}{2})|^2 + |m_0(\frac{\xi+1}{2})|^2\Big)e^{2\pi i k\xi}d\xi.
\end{aligned}$$

Puisque cette équation est valable pour tout $k \in \mathbb{Z}$ nous obtenons (1.15). ■

1.1.7 Expression du filtre m_g pour $g \in W_0$

Cette section s'inspire de [1]. Pour une AMR $((V_j), \phi)$ soient $g \in W_0 = V_1 \cap V_0^{\perp} \subset V_1 = W_0 \oplus V_0$, m_g comme dans l'équation (1.13) et m_0 le filtre passe-bas associé à la fonction d'échelle ϕ. Nous allons montrer qu'il existe une fonction 1-périodique $\beta \in L^2(\mathbb{T})$ telle que

$$m_g(\xi) = e^{-2i\pi(\xi+\frac{1}{2})}\beta(2\xi)\overline{m_0(\xi+\frac{1}{2})}) \tag{1.16}$$

Premièrement montrons que

$$m_g(\xi)\overline{m_0(\xi)} + m_g(\xi+\frac{1}{2}))\overline{m_0(\xi+\frac{1}{2})}) = 0 \quad p.p. \quad \xi \in \mathbb{R} \tag{1.17}$$

Puisque $g(x) \perp V_0$, on a

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\overline{\phi(x-k)}dx = \langle g(x), \phi(x-k)\rangle \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Comme la transformée de Fourier de $\phi(x-k)$ est $\widehat{\phi}(\xi)e^{-2i\pi\xi k}$ il s'en suit de l'identité de Plancherel que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(\xi)\overline{\widehat{\phi}(\xi)}e^{2i\pi\xi k}d\xi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{k}^{k+1} g(\xi)\overline{\widehat{\phi}(\xi)}e^{2i\pi\xi k}d\xi \\ &= \int_{0}^{1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} g(\xi+k)\overline{\widehat{\phi}(\xi+k)}e^{2i\pi\xi k}d\xi. \end{aligned}$$

Ainsi, les coefficients de la série de Fourier de $\sum_{k\in\mathbb{Z}} g(\xi+k)\overline{\widehat{\phi}(\xi+k)}$ sont nuls pour $k \in \mathbb{Z}$, donc en remplaçant ξ par 2ξ nous obtenons :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} g(2\xi+k)\overline{\widehat{\phi}(2\xi+k)} = 0 \quad p.p.$$

En utilisant l'identité de filtre $\widehat{g}(2\xi) = m_g(\xi)\widehat{\phi}(\xi)$ et $\widehat{\phi}(2x) = m_0(\xi)\widehat{\phi}(\xi)$ l'équation précédente devient :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} m_g(\xi+\frac{k}{2})\widehat{\phi}(\xi+\frac{k}{2})\overline{m_0(\xi+\frac{k}{2})\widehat{\phi}(\xi+\frac{k}{2})} \quad p.p. \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} m_g(\xi+\frac{k}{2})|\widehat{\phi}(\xi+\frac{k}{2})|^2\overline{m_0(\xi+\frac{k}{2})} \quad p.p. \end{aligned}$$

En faisant la sommation sur les k impairs et les k pairs, nous obtenons :

$$0 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} m_g(\xi+k)|\widehat{\phi}(\xi+k)|^2\overline{m_0(\xi+k)} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} m_g(\xi+\frac{2k+1}{2})|\widehat{\phi}(\xi+\frac{2k+1}{2})|^2\overline{m_0(\xi+\frac{2k+1}{2})} \quad p.p.$$

Comme m_g et m_0 sont 1-périodique, on peut les mettre en évidence et on a :

$$0 = m_g(\xi)\overline{m_0(\xi)}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\phi}(\xi+k)|^2 + m_g(\xi+\frac{1}{2})\overline{m_0(\xi+\frac{1}{2})}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\phi}(\frac{2\xi+1}{2}+k)|^2 \quad p.p.$$

De la relation (1.12), il s'en suit que :

$$0 = m_g(\xi)\overline{m_0(\xi)} + m_g(\xi+\frac{1}{2})\overline{m_0(\xi+\frac{1}{2})} \quad p.p.$$

ce qui donne le résultat.

De la relation d'échelle nous avons eu que $m_0(\xi) \neq 0$ ou $m_0(\xi+\frac{1}{2}) \neq 0$ p.p. $\xi \in \mathbb{R}$. Donc le vecteur $(m_0(\xi), m_0(\xi+\frac{1}{2}))$ est non nul p.p. En utilisant l'équation (1.17) et la définition du produit scalaire dans $\mathbb{C}^2$ (à savoir $\langle(a,b),(c,d)\rangle = a\overline{c}+b\overline{d}$), le vecteur $(m_g(\xi), m_g(\xi+\frac{1}{2}))$ est perpendiculaire au vecteur $(m_0(\xi), m_0(\xi+\frac{1}{2}))$ p.p. Mais $(\overline{m_0(\xi+\frac{1}{2})}, -\overline{m_0(\xi)})$ est aussi perpendiculaire à $(m_0(\xi), m_0(\xi+\frac{1}{2}))$ $p.p.$ Il existe donc une fonction $\alpha(\xi)$ telle que :

$$(m_g(\xi), m_g(\xi+\frac{1}{2})) = \alpha(\xi)(\overline{m_0(\xi+\frac{1}{2})}, -\overline{m_0(\xi)}) \quad p.p$$

ou encore

$$m_g(\xi) = \alpha(\xi)\overline{m_0(\xi+\frac{1}{2})} \quad p.p \tag{1.18}$$

et

$$m_g(\xi+\frac{1}{2})) = -\alpha(\xi)\overline{m_0(\xi)} \;\; p.p. \tag{1.19}$$

Comme m_0 est 1-périodique, l'équation (1.18) implique que :

$$m_g(\xi+\frac{1}{2}) = \alpha(\xi+\frac{1}{2})\overline{m_0(\xi+1)} = \alpha(\xi+\frac{1}{2})\overline{m_0(\xi)} \;\; p.p. \tag{1.20}$$

Les équations (1.19) et (1.20) impliquent que

$$\alpha(\xi+\frac{1}{2})\overline{m_0(\xi)} = -\alpha(\xi)\overline{m_0(\xi)}.$$

Comme $\overline{m_0(\xi)} \neq 0$ ou $\overline{m_0(\xi+\frac{1}{2})} \neq 0$ presque partout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\alpha(\xi+\frac{1}{2}) = -\alpha(\xi) \;\; et \;\; \alpha(\xi+1) = -\alpha(\xi+\frac{1}{2}) = \alpha(\xi) \;\; p.p. \tag{1.21}$$

Comme $\alpha(\xi+\frac{1}{2}) = -\alpha(\xi) = e^{-i\pi}\alpha(\xi) \;\; p.p.$, il s'en suit que $q(\xi) = e^{2i\pi(\xi+\frac{1}{2})}\alpha(\xi)$ est $\frac{1}{2}$-périodique. Par conséquent, il existe une fonction 1-périodique $\beta(\xi) = q(\frac{\xi}{2})$ telle que $\alpha(\xi) = e^{-2i\pi(\xi+\frac{1}{2})}\beta(2\xi) \;\; p.p.$ En substituant dans la relation (1.18) nous obtenons :

$$m_g(\xi) = e^{-2i\pi(\xi+\frac{1}{2})}\beta(2\xi)\overline{m_0(\xi+\frac{1}{2})} \;\; p.p.$$

Pour montre que $\beta(\xi) \in L^2(\mathbb{T})$, on montre que $\alpha(\xi) \in L^2(\mathbb{T})$. Or $m_g \in L^2(\mathbb{T})$ (voir (1.13)) et on a

$$\begin{aligned} \|m_g\|_2^2 &= \int_0^1 |\alpha(\xi)|^2|m_0(\xi+\frac{1}{2})|^2 d\xi \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} |\alpha(\xi)|^2|m_0(\xi+\frac{1}{2})|^2 d\xi + \int_{\frac{1}{2}}^1 |\alpha(\xi)|^2|m_0(\xi+\frac{1}{2})|^2 d\xi. \end{aligned}$$

En posant $x = \xi - \frac{1}{2}$ et en utilisant (1.21) on a

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^1 |\alpha(\xi)|^2|m_0(\xi+\frac{1}{2})|^2 d\xi &= \int_0^{\frac{1}{2}} |\alpha(x+\frac{1}{2})|^2|m_0(x+1)|^2 dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} |\alpha(x)|^2|m_0(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Comme $1 = |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \frac{1}{2})|^2$, on a :

$$\begin{aligned} \|m_g\|_2^2 &= \int_0^{\frac{1}{2}} |\alpha(x)|^2 \big(|m_0(x)|^2 + |m_0(x+\frac{1}{2})|^2\big) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} |\alpha(x)|^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 |\alpha(x)|^2 dx = \frac{1}{2}\|\alpha\|_2^2 \end{aligned}$$

ce qui montre que $\alpha \in L^2(\mathbb{T})$.

Nous procédons maintenant à la construction de l'ondelette mère à partir de l'AMR $((V_j);\phi)$. Comme nous voulons une fonction $\psi \in W_0 = V_1 \cap V_0^{\perp}$, d'après la section précédente, il existe un fonction 1-périodique $\beta \in L^2(\mathbb{T})$ telle que :

$$m_\psi(\xi) = e^{-2i\pi(\xi+\frac{1}{2})}\beta(2\xi)\overline{m_0(\xi+\frac{1}{2})}. \tag{1.22}$$

Or $\beta \equiv 1$ est une fonction 1-périodique dans $L^2(\mathbb{T})$. Une fonction $\psi \in V_1$ qui vérifie (1.22) pour $\beta \equiv 1$ doit aussi satisfaire (1.14) et donc

$$\widehat{\psi}(\xi) = m_\psi(\frac{\xi}{2})\widehat{\phi}(\frac{\xi}{2}) = e^{-2i\pi(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2})}\overline{m_0(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2})}\widehat{\phi}(\frac{\xi}{2}) \quad p.p.$$

Théorème 1.11 *Soit $((V_j);\phi)$ une AMR et considérons*

$$\psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_{1-k}(-1)^k\sqrt{2}\phi(2x-k) \in V_0, \quad p_k \in l_2(\mathbb{Z}) \tag{1.23}$$

telle que

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{-2i\pi(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2})}\overline{m_0(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2})}\widehat{\phi}(\frac{\xi}{2}) \quad p.p. \tag{1.24}$$

Alors ψ est une ondelette mère pour l'AMR $((V_j);\phi)$, c'est-à-dire que la famille $\{\psi(x-k) : k \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormale pour $W_0 = V_1 \cap V_0^{\perp}$.

Démonstration. Pour commencer, nous assumons que nous connaissons la transformée $\widehat{\psi}$ et essayons de trouver ψ par la transformée de Fourier inverse. Comme $\widehat{\phi} \in L^2(\mathbb{R})$ et que $|m_0|$ est bornée par (1.15), il s'en suit que $\widehat{\psi} \in L^2(\mathbb{R})$; et par conséquent que $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Nous montrons ensuite que la famille $\{\psi(x-k) : k \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormale. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(\xi+k)|^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |m_0(\xi+\frac{k}{2}+\frac{1}{2})|^2 |\widehat{\phi}(\xi+\frac{k}{2})|^2 \\
&= \sum_{r\in\mathbb{Z}} |m_0(\xi+\frac{2r+1}{2}+\frac{1}{2})|^2 |\widehat{\phi}(\xi+\frac{2r+1}{2}+\frac{1}{2})|^2 \\
&+ \sum_{r\in\mathbb{Z}} |m_0(\xi+\frac{2r+1}{2})|^2 |\widehat{\phi}(\xi+\frac{2r+1}{2})|^2.
\end{aligned}$$

En vertu de la périodicité de m_0, ces égalités deviennent :

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(\xi+k)|^2 &= |m_0(\xi)|^2 \sum_{r\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi+\frac{2r+1}{2}+\frac{1}{2})|^2 \\
&+ |m_0(\xi+\frac{1}{2})|^2 \sum_{r\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi+\frac{2r+1}{2})|^2.
\end{aligned}$$

De l'égalité (1.11), nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(\xi+k)|^2 &= |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\frac{1}{2})|^2 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Pour montre que $\psi(x-k)$ est orthogonale à V_0, nous montrons que chaque $\psi(x-k)$ est orthogonale à chaque $\phi(x-n)$. Par le théorème de Plancherel (En annexe), il suffit de montrer que $\langle(\psi(x-k))^\wedge, (\phi(x-n))^\wedge\rangle = 0 \quad \forall k, n \in \mathbb{Z}$. Pour montrer que $\psi(x)$ est orthogonale à V_0, nous montrons que $\langle(\psi(x))^\wedge, (\phi(x-k))^\wedge\rangle = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$. Comme les transformées de Fourier de $\psi(x-n)$ et $\phi(x-k)$ sont égales à $\widehat{\psi}(\xi)e^{-2i\pi\xi n}$ et $\widehat{\phi}(\xi)e^{-2i\pi\xi k}$

respectivement, par (1.14) et (1.16) nous avons

$$\begin{aligned}
\langle(\phi(x-k))^\wedge,(\psi(x))^\wedge\rangle &= \langle m_0(\frac{\xi}{2})\widehat{\phi}(\frac{\xi}{2}))e^{-2i\pi\xi k}, e^{-2i\pi(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2})}\overline{m_0(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2})\widehat{\phi}(\frac{\xi}{2})}\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\pi\xi(2k-1)}e^{i\pi}m_0(\frac{\xi}{2})\widehat{\phi}(\frac{\xi}{2})m_0(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2})\overline{\widehat{\phi}(\frac{\xi}{2})}d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}(-e^{-i\pi\xi(2k-1)})m_0(\frac{\xi}{2})m_0(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2})|\widehat{\phi}(\frac{\xi}{2})|^2d\xi.
\end{aligned}$$

Avec $t=\frac{\xi}{2}$ on a :

$$\begin{aligned}
\langle(\phi(x-k))^\wedge,(\psi(x))^\wedge\rangle &= 2\int_{-\infty}^{\infty}(-e^{-2i\pi t(2k-1)})m_0(t)m_0(t+\frac{1}{2})|\widehat{\phi}(t)|^2dt \\
&= 2\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{n\frac{1}{2}}^{(n+1)\frac{1}{2}}(-e^{-2i\pi t(2k-1)})m_0(t)m_0(t+\frac{1}{2})|\widehat{\phi}(t)|^2dt.
\end{aligned}$$

De (1.12) nous obtenons

$$\begin{aligned}
\langle(\phi(x-k))^\wedge,(\psi(x))^\wedge\rangle &= 2\int_0^1 m_0(t)m_0(t+\frac{1}{2})\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{\phi}(t+n)|^2(-e^{-2i\pi t(2k-1)})dt \\
&= 2\int_0^1 m_0(t)m_0(t+\frac{1}{2})(-e^{-2i\pi t(2k-1)})dt.
\end{aligned}$$

Comme $m_0(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{c_n}{\sqrt{2}}e^{-2i\pi\xi n}$ nous avons

$$\langle(\phi(x-k))^\wedge,(\psi(x))^\wedge\rangle=\int_0^1\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}(-1)^m c_n c_m(-e^{-2i\pi t(n+m+2k-1)})dt.$$

L'intégrale est non nulle seulement lorsque $n+m+2k-1=0$ (c'est à dire $m=-n-(2k-1)$). Donc

$$\langle(\phi(x-k))^\wedge,(\psi(x))^\wedge\rangle=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^{-n-(2k-1)}c_n c_{-n-(2k-1)}. \tag{1.25}$$

Pour évaluer cette somme , notons que n pair (impair) implique que $-n-(2k-1)$ est impair (pair). On a donc

$$(-1)^{-n-(2k-1)}c_n c_{-n-(2k-1)} + (-1)^n c_{-n-(2k-1)} c_n = 0. \tag{1.26}$$

Comme $c_n \in l^2(\mathbb{Z})$, la série converge absolument. Donc les groupements indiqués dans (1.26) montrent que la sommation dans l'équation (1.25) est égale à zero et par conséquent que $\{\psi(x-k) : k \in \mathbb{Z}\} \perp V_0 \ \ \forall k \in \mathbb{Z}$.

Montrons en fin que $\{\psi(x-n) : n \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de W_0. Nous savons que pour $n \in \mathbb{Z}$, $\{\psi(x-n) \ \in L^2(\mathbb{R})\}$. En outre

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi}(\xi) &= e^{-2i\pi(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2})}\overline{m_0(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2})}\widehat{\phi}(\frac{\xi}{2}) = e^{-2i\pi(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2})}\overline{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{c_k}{\sqrt{2}} e^{-2i\pi(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2})k}}\widehat{\phi}(\frac{\xi}{2}) \\
&= e^{-2i\pi(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2})}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\overline{c_{-k}}}{\sqrt{2}} e^{-2i\pi(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2})k}\widehat{\phi}(\frac{\xi}{2}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\overline{c_{-k}}}{\sqrt{2}} e^{-2i\pi\frac{\xi}{2}(k+1)} e^{-i\pi(k+1)}\widehat{\phi}(\frac{\xi}{2}).
\end{aligned}$$

Comme $(\phi(bx-a))^\wedge = \frac{1}{b}e^{\frac{-2i\pi\xi a}{b}}\widehat{\phi}(\frac{\xi}{b})$, la transformée inverse de $e^{-2i\pi\frac{\xi}{2}(2k+1)}\widehat{\phi}(\frac{\xi}{2})$ est $2\phi(2x-(k+1))$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi}(\xi) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^{k+1}\frac{\overline{c_{-k}}}{\sqrt{2}}\mathcal{F}(2\phi(2x-(k+1))) \\
\psi(x) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^{k+1}\overline{c_{-k}}\sqrt{2}\phi(2x-(k+1)) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^{k}\overline{c_{1-k}}\sqrt{2}\phi(2x-k).
\end{aligned}$$

On voit que $\psi(x) \in V_1$, d'où $\psi(x-k) \in V_1$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Pour voir que $\{\psi(x-k) : k \in \mathbb{Z}\} \subset W_0$ est une famille orthonormée de W_0. Nous supposons que $g \in W_0$. Par (1.14) et (1.16) nous avons

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(\xi) &= e^{-2i\pi(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2})}\beta(\xi)\overline{m_0(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2})}\widehat{\phi}(\frac{\xi}{2}). \\
&= \beta(\xi)\widehat{\psi}(\xi)
\end{aligned}$$

Comme $\beta(\xi) \in L^2(\mathbb{T})$, nous pouvons écrire en série de Fourier comme $\beta(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2i\pi n\xi}$. Donc on a

$$\widehat{g}(\xi) = \big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2i\pi n\xi}\big)\widehat{\psi}(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2i\pi n\xi}\widehat{\psi}(\xi).$$

Comme la transformée de Fourier inverse de $e^{2i\pi n\xi}\widehat{\psi}(\xi)$ est $\psi(x+n)$, nous avons que

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \psi(x-k)$$

ce qui démontre bien que toute fonction $g \in W_0$ s'exprime comme une combinaison linéaire des translatées de ψ. ■

Exemple 1.12 *L'ondelette de Haar [1]*

Dans cet exemple, nous voulons construire une fonction $\psi(x) \in W_0 \subset V_1$ telle que :

$$\langle \phi, \psi \rangle = 0 \qquad et \qquad \langle \psi, \psi \rangle = 1.$$

Comme $\psi \in V_1$, nous voulons trouver les scalaires a_1 et a_2 tels que $\psi(x) = a_1\sqrt{2}\phi(2x) + a_2\sqrt{2}\phi(2x-1)$. Mais nous savons aussi que $\phi(x) = \phi(2x) + \phi(2x-1)$. La première condition donne $0 = \frac{a_1}{\sqrt{2}} + \frac{a_2}{\sqrt{2}}$, donc $a_2 = -a_1$. De plus la deuxième condition donne $1 = a_1^2 + a_2^2$. Nous avons $a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $a_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc l' ondelette mère de Haar est :

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \phi(2x) - \phi(2x-1) \\ &= \begin{cases} 1 & si \;\; x \in [0, \frac{1}{2}); \\ -1 & si \;\; x \in [\frac{1}{2}, 1); \\ 0 & ailleurs. \end{cases} \\ &= \chi_{[0,\frac{1}{2})} - \chi_{[\frac{1}{2},1)}. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\psi_{jk}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}} & si \;\; x \in [\frac{k}{2^j}, \frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}}); \\ -2^{\frac{j}{2}} & si \;\; x \in [\frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}}, \frac{k+1}{2^j}); \\ 0 & ailleurs. \end{cases}$$

Le filtre passe-bas associé à la fonction échelle de Haar est

$$m_0(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{a_k}{\sqrt{2}} e^{-2i\pi k\xi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2i\pi\xi}.$$

On montre donc qu'à partir de $\widehat{\psi}$, nous pouvons construire ψ. En effet

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi}(\xi) &= e^{-2i\pi(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2})}\overline{m_0(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2})}\widehat{\phi}(\frac{\xi}{2}) \\
&= e^{-2i\pi(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2})}\overline{\big(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2i\pi(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2})}\big)}\widehat{\phi}(\frac{\xi}{2}) = \frac{1}{2}\widehat{\phi}(\frac{\xi}{2}) - \frac{1}{2}e^{-2i\pi(\frac{\xi}{2})}\widehat{\phi}(\frac{\xi}{2}).
\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{F}^{-1}(\frac{1}{2}\widehat{\phi}(\frac{\xi}{2})) = \phi(2x)$ et $\mathcal{F}^{-1}(\frac{1}{2}e^{-2i\pi(\frac{\xi}{2})}\widehat{\phi}(\frac{\xi}{2})) = \phi(2x-1)$, nous obtenons

$$\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x-1).$$

En fait, le filtre passe-bas m_0 et le filtre passe-haut $m_1 = e^{-2i\pi(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2})}\overline{m_0(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2})}$ produisent les ondelettes générées par la fonction échelle ϕ.

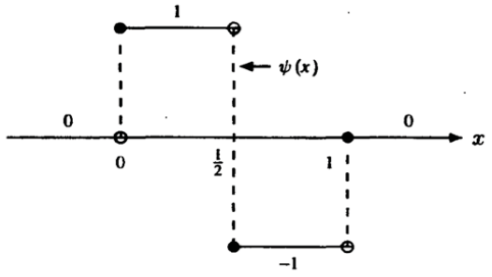

Figure 1.3 – Ondelette de Haar [3].

Dans le théorème suivant, nous introduisons un résultat important qui nous sera utile dans la suite de ce travail.

Théorème 1.13 (Théorème d'échantillonnage de Whittaker-Shannon-kotelnikov) *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $supp\widehat{f} \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Alors*

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)\,\mathrm{sinc}(x-k)$$

où la somme symétrique partielle de ces séries converge absolument et uniformément par rapport à la norme dans $\|.\|_2$ [9]

Démonstration. Pour donner une preuve à ce théorème, partons du lemme suivant (voir [3]) :

Lemme 1.14 *L'ensemble des fonctions* $\{\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{\frac{inx\pi}{a}} : n = \cdots -2, -1, 0, 1, 2 \cdots\}$ *constitue une base orthonormée pour* $L^2[-a, a]$. *Si* $f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{\frac{in\pi x}{a}}$, *alors* $\alpha_n = \frac{1}{2a}\int\limits_{-a}^{a} f(x)e^{-\frac{in\pi x}{a}}dx$.

Nous commençons par montrer que les fonctions $\{\text{sinc}(x-k) : k \in \mathbb{Z}\}$ forment une suite orthonormée dans $L^2(\mathbb{R})$. Par le lemme précédent, les fonctions $\{e^{2\pi ikx}\chi_{]-\frac{1}{2}\frac{1}{2}[}(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ forment une suite orthonormée dans $L^2(\mathbb{R})$. La transformée de Fourier de ces fonctions donne

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\Big(e^{2\pi ikx}\chi_{]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[}(x)\Big)(\xi) &= \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi ikx}e^{-2\pi ik\xi}dx \\
&= \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi ik(\xi-k)x}dx \\
&= \Big[\frac{1}{-2\pi i(\xi-k)}e^{-2\pi ik(\xi-k)x}\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\
&= \text{sinc}(\xi-k).
\end{aligned}$$

Comme la transformée de Fourier est unitaire, cela implique que les fonctions $\{\text{sinc}(x-k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sont orthonormées. Ainsi, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ nous pouvons exprimer $\widehat{f}(x)$ en séries de Fourier dans l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$$\widehat{f}(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi ik\xi}$$

où

$$c_k = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \widehat{f}(x) e^{-2\pi i k\xi} d\xi. \tag{1.27}$$

Rappelons que les sommes partielles des séries de Fourier convergent par rapport à la norme $\|.\|^2_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$, c'est à dire

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\widehat{f}(\xi) - \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{2\pi i k\xi}|^2 \longrightarrow 0 \ \ quand \ \ N \longrightarrow \infty.$$

Comme nous travaillons dans un intervalle fini, la convergence dans $L^2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ implique la convergence dans $L^1(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, donc

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\widehat{f}(\xi) - \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{2\pi i k\xi}| \longrightarrow 0 \ \ quand \ \ N \longrightarrow \infty. \tag{1.28}$$

Or on a le résultat suivant.

Lemme 1.15 *Soit $f, \widehat{f}, \in L^1(\mathbb{R})$. Alors*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi x\xi} d\xi \ \ p.p. \ \ x \in \mathbb{R}. \tag{1.29}$$

Si f est continue, la formule (1.29) *est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$ ([9]).*

Comme $supp\widehat{f} \subseteq [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, de l'expression de c_k dans (1.27) et par le lemme précédent on a $c_k = f(-k)$. En utilisant encore ce lemme, on a la formule suivante

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi x\xi} d\xi = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(-k) e^{2\pi i k\xi} \Big) e^{2\pi i x\xi} d\xi \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

D'après (1.28) nous pouvons permuter la sommation et l'intégration. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(-k) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i(x+k)\xi} d\xi \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(-k) \Big[\frac{1}{2\pi i(\xi-k)} e^{2\pi i k(x-k)\xi} \Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(-k)\,\mathrm{sinc}(x+k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)\,\mathrm{sinc}(x-k). \end{aligned}$$

Ces séries convergent dans $L^2(\mathbb{R})$. En effet, comme $\{\mathrm{sinc}(x-k) : k \in \mathbb{Z}\}$ est un système orthonormé,

$$\|f(x) - \sum_{n=-N}^{N} f(k)\,\mathrm{sinc}(x-k)\|_2 = \|\sum_{|n|>N} f(k)\,\mathrm{sinc}(x-k)\|_2 = \sqrt{\sum_{|n|>N} |f(k)|^2}$$

converge vers 0 quand $N \longrightarrow \infty$ car $\{f(k) : k \in \mathbb{Z}\} \in l^2(\mathbb{Z})$. Ainsi $\{\mathrm{sinc}(x-k) : k \in \mathbb{Z}\}$ forment une base orthonormée ■

Nous allons expliquer comment ce résultat est lié aux ondelettes, même si quand il a été obtenu la notion d'ondelettes n'avait pas encore paru. Le mot échantillonnage reflète le fait que les fonctions concernées sont complètement déterminées si nous savons leurs valeurs sur l'ensemble dénombrable $\mathbb{Z}$. Le nom *Shannon* est distingué parce qu'il est associé à de nombreux aspects et applications importants de l'échantillonnage.

Exemple 1.16 *Ondelette de Shannon [1]*

L'exemple **1.2** nous a donné

$$\widehat{\phi}(\xi) = \widehat{\mathrm{sinc}}(\xi) = \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(\xi)$$

dont la transformée inverse de Fourier est :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2i\pi\xi x} d\xi = \frac{1}{2i\pi x}(e^{2i\pi x\frac{1}{2}} - e^{-2i\pi x\frac{1}{2}}) = \frac{1}{\pi x}\frac{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}}{2i} = \frac{\sin \pi x}{\pi x}.$$

Puisque $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi + k)|^2 = 1 \quad p.p \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$, $\{\phi(x-k) : k \in \mathbb{Z}\}$ constitue un système orthonormée dans $L^2(\mathbb{R})$, par l'orthonormalité des translatées de $\phi(x)$. Pour correspondre au fait que $\widehat{\phi}(\xi) = \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(\xi)$, nous prenons V_0 comme l'espace des fonctions à bande limitée.

$$V_0 = \{\phi \in L^2(\mathbb{R}) : \widehat{\phi}(\xi) = 0 \quad \forall \ |\xi| > \frac{1}{2}\}.$$

Par le théorème d'échantillonnage de Whittaker-Shannon-Kotelnikov, si $\phi \in V_0$, alors $\phi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi(k)\,\mathrm{sinc}(\pi(x-k))$ dans $\|.\|_2$. Ainsi la série converge simplement.
Donc $\{\phi(x-k) : k \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormale de V_0. Nous pouvons donc prendre

$$V_j = \overline{\{\phi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j x - k) : k \in \mathbb{Z}\}}.$$

Donc

$$V_j = \{\phi \in L^2(\mathbb{R}) : \quad \widehat{\phi}(\xi) = 0, \quad |\xi| > 2^j\frac{1}{2}\}.$$

Nous voyons donc que $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ est une AMR avec comme fonction d'échelle $\phi(x) = \mathrm{sinc}(\pi x)$.

La densité, la séparation et les propriétés d'orthogonalité sont évidement satisfaits pour chaque V_j. Donc $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ s'en suit du fait que l'application $f \longrightarrow \widehat{f}$ est une bijection de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui même et aussi de la relation de Plancherel (en Annexe).
Soit donc $\phi \in L^2(\mathbb{R})$. Alors $\widehat{\phi} \in L^2(\mathbb{R})$ et

$$\widehat{\phi}(\xi) = \chi_{[-2^j\frac{1}{2},2^j\frac{1}{2})}(\xi).$$

Alors $\phi_j \in V_j$ et $\|\widehat{\phi}_j - \phi\|_2 \to 0$ quand $j \to \infty$. Donc $\|\phi_j - \phi\|_2 \to 0$ quand $j \to \infty$. D'après l'égalité des filtres, on a

$$\widehat{\phi}(\xi) = m_0(\frac{\xi}{2})\widehat{\phi}(\frac{\xi}{2}) = \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(\xi)$$

Généralement, $m_0 \in L^2(\mathbb{T})$, donc m_0 est une extension 1-périodique de $\chi_{[-\frac{1}{4},\frac{1}{4})}(\xi)$. D'après l'ondelette mère du théorème 1.14 (voir filtre et transformée de Fourier), on a

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}(\xi) &= e^{-2i\pi(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2})}\overline{m_0(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2})}\widehat{\phi}(\frac{\xi}{2}) \quad p.p \\ &= e^{-i\pi\xi}e^{-i\pi}\overline{m_0(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2})}\widehat{\phi}(\frac{\xi}{2})\end{aligned}$$

et donc

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{-i\pi\xi}\big(\chi_{[-1,-\frac{1}{2})}(\xi) + \chi_{[\frac{1}{2},1)}(\xi)\big) \quad p.p$$

1.2 Les propriétés des fonctions de carré intégrables translatées dans $L^2(\mathbb{R})$

1.2.1 Espace Invariant par Translation (EIT)

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a défini l'opérateur translation T_k par $T_k\phi(x) = \phi(x-k) = \phi_k(x)$.

Définition 1.2 *Soit $V \in L^2(\mathbb{R})$ un espace fermé non vide. Cet espace est dit invariant par translation si et seulement si $T_k\phi \in V$ $\forall k \in \mathbb{Z}$ quelque soit $\phi \in V$, $k \in \mathbb{Z}$. Si $\mathcal{T}_\phi = \{\phi_k : k \in \mathbb{Z}\}$ alors $\mathcal{T}_\phi$ engendre un sous espace fermé $\overline{\langle \mathcal{T}_\phi \rangle}$ noté simplement $\langle \phi \rangle$. C'est à dire la fermeture dans $L^2(\mathbb{R})$ de toutes les combinaisons linéaires finies des fonctions ϕ_k. Cet espace est appelé espace principal invariant par translation engendré par ϕ.*

Dans le cas où $\phi = \text{sinc}$, alors $\mathcal{T}_\phi$ est une famille orthonormée (puisque $\widehat{\text{sinc}}(\xi) = \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(\xi)$) et donc nous avons que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(k)|^2 < \infty$ pour toute fonction f comme dans

le théorème d'échantillonnage de Whittaker-Shannon-Kotelnikov. De plus $V_0 = \langle \text{sinc} \rangle$ et l'ensemble $\{V_j = D_j V_0 : j \in \mathbb{Z}\}$ est une AMR où $\phi = \text{sinc}$ est la fonction échelle pour cette AMR.

Signalons que V_0 et W_0 sont en général des espaces principaux invariants par translation mais ont une différence importante par rapport à l'opérateur de dilatation car $V_j = D_j V_0$ est une suite croissante d'espaces fermés emboités avec $j \to \infty$, alors que $W_j = D_j W_0$ sont des espaces disjoints satisfaisant à (1.9). Les propriétés des espaces invariants par translation ont beaucoup de conséquences sur la théorie des ondelettes. Les propriétés basiques de $\langle \phi \rangle$ sont déterminées par celles du système $\mathcal{T}_\phi$. Soit donc ϕ une fonction non nulle dans $L^2(\mathbb{R})$, et soit

$$p_\phi(\xi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi + j)|^2$$

et considérons l'espace $\mathcal{M}_\phi = L^2([0,1); p_\phi)$ de toutes les fonctions m de période 1 satisfaisant à

$$\int_0^1 |m(\xi)|^2 p_\phi(\xi) d\xi := \|m(\xi)\|^2_{\mathcal{M}_\phi} < \infty.$$

1.2.2 Les propriétés des fonctions de carré intégrables translatées dans $L^2(\mathbb{R})$

Ici nous commençons par montrer comment p_ϕ nous amène à une correspondance naturelle entre l'espace $\langle \phi \rangle$ et l'espace $\mathcal{M}_\phi$. En effet observons que de part sa définition, la fonction p_ϕ est une fonction générale positive et de période 1 dans $L^1([0,1); d\xi)$. Introduisons donc les crochets suivants pour deux fonctions $\widehat{f}, \widehat{g} \in L^2(\mathbb{R})$

$$[\widehat{f}, \widehat{g}](\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi + k) \overline{\widehat{g}(\xi + k)}.$$

Notons que $p_\phi = [\widehat{\phi}, \widehat{\phi}]$ et pour $\widehat{f}, \widehat{g} \in L^2(\mathbb{R})$, on a :

$$|[\widehat{f}, \widehat{g}]| \leqslant [\widehat{f}, \widehat{f}]^{\frac{1}{2}} [\widehat{g}, \widehat{g}]^{\frac{1}{2}}.$$

En outre

$$\begin{aligned} \langle T_k f, g \rangle &= \langle (T_k f)^\wedge, \widehat{g} \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} e^{-2i\pi\xi k} d\xi = \int_0^1 [\widehat{f}, \widehat{g}](\xi) e^{-2i\pi\xi k} d\xi \end{aligned} \tag{1.30}$$

correspond au $k^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de $[\widehat{f}, \widehat{g}]$ qui est une fonction de $L^2([0,1))$. Donc nous avons :

Lemme 1.17 *Pour $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, $\langle f \rangle \perp \langle g \rangle$ si et seulement si $[\widehat{f}, \widehat{g}](\xi) = 0$ p.p.*

Cela est claire puisque

$$\begin{aligned} \langle f \rangle \perp \langle g \rangle &\Leftrightarrow \langle T_j f, T_l g \rangle = 0 \quad \forall j, l \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \langle T_k f, g \rangle = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow [\widehat{f}, \widehat{g}](\xi) = 0. \end{aligned}$$

en vertu de (1.30). Ce critère de perpendicularité fournit une preuve facile d'un résultat de base qui nous sera utile dans la suite. Avant de continuer, introduisons la carte $J_\phi : \mathcal{M}_\phi \to L^2(\mathbb{R})$ définie par $J_\phi m = (m\widehat{\phi})^\vee$.

Théorème 1.18 *J_ϕ est une isométrie entre $\mathcal{M}_\phi$ et $\langle \phi \rangle$.[30]*

Démonstration. Le fait que J_ϕ est une isométrie entre $\mathcal{M}_\phi$ et $\langle \phi \rangle$ est la conséquence de l'argument de périodisation

$$\begin{aligned} \|J_\phi m\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{-\infty}^{\infty} |m(\xi)|^2 |\widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_0^1 |m(\xi)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi + k)|^2 d\xi = \|m(\xi)\|^2_{\mathcal{M}_\phi}. \end{aligned}$$

Si $h \in \langle\phi\rangle^{\perp}$, alors $\langle h\rangle \perp \langle\phi\rangle$ et, par conséquent, par le lemme précédent on a

$$[\widehat{h}, (J_\phi m)^\wedge](\xi) = \overline{m(\xi)}[\widehat{h}, \widehat{\phi}](\xi) = 0 \quad p.p. \quad \forall m \in \mathcal{M}_\phi.$$

Il s'en suit que $J_\phi m \in (\langle\phi\rangle^{\perp})^{\perp} = \langle\phi\rangle$. D'où J_ϕ envoie $\mathcal{M}_\phi$ dans $\langle\phi\rangle$. Si $J_\phi\mathcal{M}_\phi \neq \langle\phi\rangle$, alors $J_\phi\mathcal{M}_\phi$ serait un sous espace propre de $\langle\phi\rangle$ (puisque J_ϕ est une isométrie). D'où il existe une fonction non nulle g telle que :

$$0 = \langle g, J_\phi m\rangle = \langle\widehat{g}, m\widehat{\phi}\rangle = \int_0^1 \overline{m(\xi)}[\widehat{g}, \widehat{\phi}](\xi)d\xi \quad \forall m \in \mathcal{M}_\phi.$$

Nous pouvons clairement choisir $m \in \mathcal{M}_\phi$, telle que $\overline{m(\xi)}[\widehat{g}, \widehat{\phi}] = |[\widehat{g}, \widehat{\phi}]|$. Ainsi

$$0 = \int_0^1 |[\widehat{g}, \widehat{\phi}]|(\xi)d\xi.$$

Il s'en suit donc que $[\widehat{g}, \widehat{\phi}] = 0$. En vertu du lemme précédent , on voie que $g \perp \langle\phi\rangle$. Comme $g \in \langle\phi\rangle$ on a une contradiction. ■

Autrement dit, les deux espaces $\mathcal{M}_\phi$ et $\langle\phi\rangle$ sont essentiellement équivalents via l'opérateur J_ϕ. Il est donc naturel de se demander comment les propriétés de la fonction de poids p_ϕ correspondent aux propriétés de la famille génératrice $\mathcal{T}_\phi$. Par Exemple, sous l'opérateur J_ϕ les fonctions ϕ_k $(k \in \mathbb{Z})$ sont images des fonctions exponentielles $e_k = e^{-2i\pi k\xi}$. En effet

$$\begin{aligned} J_\phi : \mathcal{M}_\phi &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ e_k &\longmapsto J_\phi e_k \\ &= \left(e_k\widehat{\phi}\right)^\vee \\ &= (\widehat{\phi}_k)^\vee \\ &= \phi_k. \end{aligned}$$

Donc le système $\{e_k = e^{-2i\pi k\xi} : k \in \mathbb{Z}\}$ est linéairement indépendant comme le système $\mathcal{T}_\phi$ l'est. Les deux théorèmes suivants montrent aussi le rôle joué par la fonction p_ϕ. [30]

Théorème 1.19 *Le système $\mathcal{T}_\phi = \{\phi_k = T_k\phi : k \in \mathbb{Z}\}$ constitue une base orthonormée si et seulement $p_\phi(\xi) = 1$ p.p.*

Démonstration. Pour démontrer cela, on montre que pour $k, l \in \mathbb{Z}$, $\langle T_k\phi, T_l\phi\rangle = \delta_{kl}$ si et seulement si $p_\phi(\xi) = 1$, $\xi \in [0,1]$. En utilisant le théorème de Plancherel, on a

$$\begin{aligned}
\langle T_k\phi, T_l\phi\rangle &= \langle \phi, T_{l-k}\phi\rangle \\
&= \langle \widehat{\phi}, (T_{l-k}\phi)^\wedge\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}(\xi)|^2 e^{-2i\pi\xi(l-k)} d\xi \\
&= \int_0^1 \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi+j)|^2 e^{-2i\pi\xi(l-k)} d\xi = \int_0^1 p_\phi(\xi) e^{-2i\pi\xi(l-k)} d\xi.
\end{aligned}$$

Le résultat s'en suit du fait que le système $\{e_k = e^{-2i\pi\xi k}\}$ est une base orthonormée de $L^2([0,1))$ ■

Théorème 1.20 *$p_\phi > 0$ p.p. si et seulement si il existe une base orthonormée de $\langle\phi\rangle$ de la forme $\{T_k\varphi : k \in \mathbb{Z}\}$ où $\varphi = (\frac{1}{\sqrt{p_\phi}}\widehat{\phi})^\vee$.*

Démonstration. Puisque le système $\{\frac{e_k}{\sqrt{p_\phi}} : k \in \mathbb{Z}\}$ constitue une base orthonormée pour $\mathcal{M}_\phi$, le théorème s'en suit en appliquant J_ϕ à $\frac{e_k}{\sqrt{p_\phi}}$. En effet

$$\begin{aligned}
J_\phi : \mathcal{M}_\phi &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \\
\frac{e_k}{\sqrt{p_\phi}} &\longmapsto J_\phi \frac{e_k}{\sqrt{p_\phi}} \\
&= \Big(\frac{e_k}{\sqrt{p_\phi}}\widehat{\phi}\Big)^\vee \\
&= (\frac{1}{\sqrt{p_\phi}}\widehat{\phi}_k)^\vee.
\end{aligned}$$

■

Définition 1.3 *Nous considérons l'espace séparable de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ doté du produit scalaire défini dans l'introduction et dans ce qui suit, nous utilisons l'espace $\langle\phi\rangle \subset L^2(\mathbb{R})$. Une famille dénombrable d'éléments $\mathcal{T}_\phi = \{\phi_k : k \in \mathbb{Z}\}$ dans $\langle\phi\rangle$*

– *est un cadre de* $\langle\phi\rangle$ *si et seulement si il existe deux constantes* $A, B > 0$ *pour lesquelles*

$$A\|f\|_2^2 \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, T_k\phi\rangle|^2 \leqslant B\|f\|_2^2$$

pour toute fonction $f \in \langle\phi\rangle$.

– *est une base de Riesz de* $\langle\phi\rangle$ *s'il existe des constantes* $A, B > 0$ *telles que*

$$A\sum_k |c_k|^2 \leqslant \|\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\phi_k\|^2 \leqslant B\sum_k |c_k|^2 \tag{1.31}$$

pour toute suite finie $\{c_k\}$.

Toute base orthonormée est une base de Riesz et tout base de Riesz est un cadre. Les nombres A, B sont appelés les bornes du cadre. Ils ne sont pas uniques. La borne inférieure optimale du cadre est le supremum de toutes les bornes inférieures et la borne supérieure optimale du cadre est l'infimum de toutes les bornes supérieures du cadre. Un cadre est serré si $A = B$ et il est de Parseval si $A = B = 1$. La différence entre la base de Riesz et le cadre est que les éléments du cadre peuvent être dépendants. Plus précisément, un cadre $\{\phi_k : k \in \mathbb{Z}\}$ est une base de Riesz si et seulement si

$$\sum_{k\in\mathbb{I}} c_k\phi_k = 0,\ \{c_k\} \in l^2(\mathbb{Z}) \Rightarrow c_k = 0, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Notons aussi que toute base orthonormée dans l'espace de Hilbert est un cadre de Parseval. D'un autre coté, un cadre de Parseval n'est pas nécessairement une base orthonormée.

Exemple 1.21 *Soit* $H = \mathbb{R}^2$ *et prenons*

$$\phi_1 = (0, \sqrt{\frac{2}{3}}), \quad \phi_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}), \quad \phi_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}).$$

Alors, pour $f = (f_1, f_2) \in \mathbb{R}^2$ *nous avons*

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{3} |\langle f, \phi_j\rangle|^2 &= \frac{2}{3}|f_2|^2 + |\frac{1}{\sqrt{2}}f_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}f_2|^2 + |\frac{1}{\sqrt{2}}f_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}f_2|^2 \\ &= \|f\|^2.\end{aligned}$$

Donc $\{\phi_j\}_{j=1}^3$ est un cadre de Parseval mais n'est pas évidemment une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$.

Dans ce qui précède, nous avons vu que $\mathcal{T}_\phi$ est toujours linéairement indépendant. Nous avons aussi trouvé avec précision quand c'est une base orthonormée de $\langle\phi\rangle$; en outre nous avons montré comment modifier $\mathcal{T}_\phi$ (Théorème 1.20). Cela a été fait quand $\Omega = \{\xi \in [0,1) : p_\phi \neq 0\}$ a une mesure $|\Omega| = 1$. Si $0 < \Omega < 1$ nous ne pouvons pas considérer la fonction $\frac{1}{\sqrt{p_\phi}}$; pourtant, si nous posons $\varphi = [\frac{\tilde{\chi}_{\Omega_\phi}}{\sqrt{p_\phi}}\widehat{\phi}]^\vee$ et en définissant $\tilde{\chi}_{\Omega_\phi}$ comme une extension 1-périodique de χ_{Ω_ϕ} sur la droite réelle $\mathbb{R}$ (telle que $\frac{\tilde{\chi}_{\Omega_\phi}}{\sqrt{p_\phi}} = 0$ quand $p_\phi = 0$) nous avons $\varphi \in \langle\phi\rangle$ bien définie (par le Théorème 1.18). Soit donc $m \in \mathcal{M}_\phi$ tel que $f = (m\widehat{\phi})^\vee$ est une fonction générale dans $\langle\phi\rangle$. Alors

$$\begin{aligned}
\langle f, \varphi_k\rangle &= \langle f, T_k\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} m(\xi)\widehat{\phi}(\xi)\frac{\tilde{\chi}_{\Omega_\phi}(\xi)}{\sqrt{p_\phi(\xi)}}e^{2i\pi k\xi}\overline{\widehat{\phi}}(\xi)d\xi \\
&= \int_{\Omega_\phi} m(\xi)\widehat{\phi}(\xi)\frac{1}{\sqrt{p_\phi(\xi)}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\phi}(\xi+k)|^2 e^{2i\pi k\xi}d\xi \\
&= \int_{\Omega_\phi} m(\xi)\frac{1}{\sqrt{p_\phi(\xi)}}p_\phi(\xi)e^{2i\pi k\xi}d\xi = \int_{\Omega_\phi} m(\xi)\sqrt{p_\phi(\xi)}e^{2i\pi k\xi}d\xi
\end{aligned}$$

qui est le $-k^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de la fonction $m(\xi)\sqrt{p_\phi(\xi)}$ qui est dans $L^2([0,1))$. Ainsi

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\langle f, \varphi_k\rangle|^2 = \int_0^1 |m(\xi)|^2 p_\phi(\xi)d\xi = \|f\|_2^2. \tag{1.32}$$

Ceci est une extension du Théorème 1.20.

1.2.3 Espace dual de $\mathcal{T}_\phi$

Nous considérons le cas des systèmes satisfaisant à

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle f, \phi\rangle\tilde{\phi}, \quad f \in L^2(\mathbb{R})$$

où les familles $\mathcal{T}_\phi = \{\phi_k : k \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathcal{T}_{\tilde{\phi}} = \{\tilde{\phi}_k : k \in \mathbb{Z}\}$ peuvent être différentes. Soient deux systèmes de Bessel $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ et $\{\tilde{\phi}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ pour $L^2(\mathbb{R})$. Alors $\mathcal{T}_{\tilde{\phi}} = \{\tilde{\phi}_k : k \in \mathbb{Z}\}$ est appelé système dual à $\{\phi_k : k \in \mathbb{Z}\}$ si

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \phi_k\rangle\langle g, \tilde{\phi}_k\rangle = \langle f, g\rangle.$$

Si tel est le cas, nous avons

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\phi}\rangle\phi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \phi\rangle\tilde{\phi}.$$

La fonction $\tilde{\phi}$, si elle existe est appelée *la fonction canonique duale* de ϕ. Ceci montre que si le dual canonique existe, il est unique. Le théorème suivant nous montre précisément quand le dual canonique à ϕ existe.

Théorème 1.22 *Il existe un dual canonique, $\tilde{\phi}$, de $\phi \in \langle\phi\rangle$ si et seulement si $\frac{1}{p_\phi} \in L^1([0,1))$. Dans ce cas, $\tilde{\phi} = \left(\frac{1}{p_\phi}\widehat{\phi}\right)^\vee$.*

Démonstration. Pour $\tilde{\phi} \in \langle\phi\rangle$, il s'en suit (isométrie entre $\mathcal{M}_\phi$ et $\langle\phi\rangle$) qu'il existe une fonction unique $m(\xi) \in \mathcal{M}_\phi$ telle que $\widehat{\tilde{\phi}} = m\widehat{\phi}$. En outre, $\widehat{\phi}$ doit satisfaire $\langle\phi_k, \tilde{\phi}\rangle = \delta_{k0}$ $\forall k \in \mathbb{Z}$. En outre, *(voir Lemme 12)* $\langle\phi_k, \tilde{\phi}\rangle$ est le $k^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de $[\phi_k, \tilde{\phi}] = \overline{m}p_\phi \in L^1([0,1))$. Cela est le cas si et seulement si $\overline{m}p_\phi = 1$ *p.p.*. D'où $m = \overline{m} = \frac{1}{p_\phi}$. Finalement, puisque $\frac{1}{p_\phi} = \frac{p_\phi}{p_\phi^2}$, nous voyons que $\frac{1}{p_\phi} \in \mathcal{M}_\phi$ si et seulement si $\frac{1}{p_\phi} \in L^1([0,1))$ ■

Notons aussi que si $\tilde{\phi}$ est le dual canonique de ϕ alors leurs rôles sont interchangeables. En effet, dans le cas où $\mathcal{T}_\phi$ est une base de Riesz, la condition $\frac{1}{p_\phi} \in L^1([0,1))$ est automatique puisque $0 < A \leqq p_\phi$ *p.p.*. En fait, $\sqrt{p_\phi}$ et $\frac{1}{\sqrt{p_\phi}}$ sont toutes des fonctions bornées dans ce cas. Dans le Théorème 1.20, on a montré que la famille $\{\varphi_k : k \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée pour $\langle\phi\rangle$ si $\varphi = (\frac{1}{\sqrt{p_\phi}}\widehat{\phi}(\xi))^\vee$ et donc, on a que

$$\widehat{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{p_\phi}}\widehat{\phi}.$$

De plus, dans le Théorème 1.22 on a

$$\tilde{\phi} = \big(\frac{1}{p_\phi}\widehat{\phi}\big)^\vee \Leftrightarrow \widehat{\tilde{\phi}} = \frac{1}{p_\phi}\widehat{\phi}.$$

Les deux dernières expressions donnent

$$\sqrt{p_\phi}\widehat{\tilde{\phi}} = \widehat{\varphi}.$$

Donc, quand $\mathcal{T}_\phi$ est une base de Riesz, on obtient la formule suivante pour une fonction $f \in \langle\phi\rangle$

$$\widehat{f} = \frac{\widehat{f}}{\sqrt{p_\phi}}\sqrt{p_\phi} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle\frac{\widehat{f}}{\sqrt{p_\phi}}\sqrt{p_\phi}, \widehat{\varphi}_k\rangle\widehat{\varphi}_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle\widehat{f}, \frac{\widehat{\varphi}_k}{\sqrt{p_\phi}}\rangle\widehat{\varphi}_k\sqrt{p_\phi} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle\widehat{f}, \widehat{\tilde{\phi}}_k\rangle\widehat{\phi}_k.$$

En prenant la transformée inverse de Fourier, nous obtenons

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle f, \tilde{\phi}_k\rangle\phi_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle f, \phi_k\rangle\tilde{\phi}_k$$

pour tout $f \in \langle\phi\rangle$.

Théorème 1.23 *Le système $\mathcal{T}_\phi$ est un cadre pour $\langle\phi\rangle$ si et seulement si il existe deux constantes $0 < A \leqq B < \infty$ telles que [30]*

$$A\chi_{\Omega_\phi} \leqq p_\phi(\xi) \leqq B\chi_{\Omega_\phi} \quad p.p.$$

où $\Omega_\phi = \{\xi \in [0,1] : p_\phi(\xi) > 0\}$ Dans ce cas, il existe un unique système dual $\mathcal{T}_{\tilde{\phi}} = \{T_k\tilde{\phi} \equiv \tilde{\phi}_k : k \in \mathbb{Z}\} \subset \langle\phi\rangle$, où $\tilde{\phi} = \left(\frac{\tilde{\chi}_{\Omega_\phi}}{p_\phi}\widehat{\phi}\right)^\vee$.

Notons en général que, quand $\tilde{\phi} = \left(\frac{\tilde{\chi}_{\Omega_\phi}}{p_\phi}\widehat{\phi}\right)^\vee$, alors $\tilde{\phi} \in \langle\phi\rangle = \langle\tilde{\phi}\rangle$ et $p_\phi = \chi_{\Omega_\phi}$ $p.p.$. En outre $\mathcal{T}_\phi$ est un cadre de Parseval

En effet, en choisissant une fonction $f \in \langle \phi \rangle$ telle que $\widehat{f} = m\widehat{\phi}$ et en utilisant le théorème de Plancherel on a successivement

$$\begin{aligned}
\langle f, T_k\phi \rangle &= \langle \widehat{f}, \widehat{\phi}_k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} m(\xi)\widehat{\phi}(\xi)\overline{\widehat{\phi}}(\xi)e^{-2i\pi\xi k}d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} m(\xi)|\widehat{\phi}(\xi)|^2 e^{-2i\pi\xi k}d\xi = \int_{\Omega_\phi} \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi+l)|^2 m(\xi)e^{-2i\pi\xi k}d\xi \\
&= \int_{\Omega_\phi} m(\xi)p_\phi(\xi)e^{-2i\pi\xi k}d\xi
\end{aligned}$$

. Par conséquent on a

$$\sum_k |\langle f, T_k\phi \rangle|^2 = \int_{\Omega_\phi} |m(\xi)|^2 |p_\phi(\xi)|^2 d\xi. \tag{1.33}$$

Or, par définition du cadre de Parseval, on a que $\sum_k |\langle f, T_k\phi \rangle|^2 = \|f\|^2$. Ainsi des relations (1.33) et (1.32) on a

$$\int_{\Omega_\phi} |m(\xi)|^2 |p_\phi(\xi)|^2 d\xi = \int_{\Omega_\phi} |m(\xi)|^2 p_\phi(\xi)d\xi$$

ce qui donne $p_\phi = \chi_{\Omega_\phi}$. Un peu plus général que l'AMR orthonormée, les ondelettes constituent une AMR de cadre de Parseval en ondelettes ψ où $\mathcal{T}_\psi$ est un cadre de Parseval pour W_0 et où la fonction échelle ϕ génère un cadre de Parseval pour V_0.

1.3 Approximation non-linéaire

L'une des plus célèbres contributions à la construction d'une AMR en ondelettes a été faite par I. Daubechies qui a utilisé une ingénieuse construction produisant ainsi

une AMR en ondelettes à support compact et pouvant avoir une grande régularité et de nombreux moments nuls, voir [16] et [15], où le $k^{\text{ième}}$ moment de ψ est définie par l'intégrale :

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \psi(x) dx.$$

Ces ondelettes sont très utiles en analyse numérique et en ingénierie, étant donné que les expansions en ondelettes d'une fonction lisse et continue par morceaux convergent très rapidement. Plus précisément, supposons que $f \in C^R(\mathbb{R})$ tel que :

$$\|f\|_{C^R} = max\{\|f^{(s)}\|_\infty : S = 0, 1, \cdots, R\} < \infty.$$

et ψ une ondelette à support compact ayant au moins R moments nuls. L'approximation non-linéaire projette une fonction sur N vecteurs orthogonaux sélectionnés à priori. Cette approximation est améliorée en choisissant les N vecteurs en fonction de chaque signal. Dans cette section, nous analysons les performances de cet approximation dans une base d'ondelettes. Une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ sera approximée par N ondelettes sélectionnées de manière optimale dans une base orthonormée $\{\psi_m : m \in \mathbb{Z}\}$ de $L^2(\mathbb{R})$.

1.3.1 Décroissance des coefficients et approximation

Pour que la convergence d'une fonction soit rapide, il faut que les coefficients en ondelettes décroissent rapidement quand $j \longrightarrow \infty$. Cette décroissance est liée au nombre de moments nuls de l'ondelette ψ. C'est à dire que la transformée de Fourier de ψ a un zéro d'ordre R en $\xi = 0$, ou encore que ψ est orthogonale à tous les polynômes de degré inférieur à R. Montrons que si $f \in C^R(\mathbb{R})$ sur un intervalle I, l'ordre de décroissance des coefficients d'ondelettes $\langle f, \psi_m \rangle$ dans l'intervalle I est $2^{-j(R+\frac{1}{2})}$. C'est à dire qu'il existe une borne M telle que

$$|\langle f, \psi_m \rangle| \leqslant M 2^{-j(R+\frac{1}{2})}.$$

Nous assommons que ψ est à support compact. C'est à dire qu' il existe $L > 0$ tel que $|x| \geqslant L \Rightarrow \psi(x) = 0$. Définissons donc $\Psi(x)$ pour $r \in \mathbb{N}$ comme suit :

$$\Psi_R(x) = \int_L^x t^{r-1}\psi(t)dt.$$

En outre, comme ψ a R moments nuls le support de $\Psi(x)$ est dans $[-L, L]$ $\forall\, r \leqslant R$. On a donc

Lemme 1.24 *Pour toute fonction $f(x) \in C^R$, on a :*

$$\langle f(x), \psi(2^j x - k)\rangle = \frac{1}{(R-1)!}\frac{1}{2^{jR}}\int_{\frac{k-L}{2^j}}^{\frac{k+L}{2^j}} f^{(R)}(x)\Psi_R(x)dx.$$

En effet en appliquant la formule de Taylor avec le reste intégral (reste de Laplace) à la fonction f autour de $\frac{k-L}{2^j}$,on a

$$f(x) = \sum_{i=0}^{R-1}\frac{f^{(i)}}{i!}(x - \frac{K-L}{2^j})^i + \frac{1}{(R-1)!}\int\limits_{\frac{k-L}{2^j}}^{x}(x-t)^{R-1}f^{(R)}(t)dt.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\langle f(x), \psi(2^j x - k)\rangle &= \int_{\frac{k-L}{2^j}}^{\frac{k+L}{2^j}} f(x)\psi(2^j x - k)dx \\
&= \frac{1}{(R-1)!}\int_{\frac{k-L}{2^j}}^{\frac{k+L}{2^j}} f^{(R)}(x)\int_{\frac{k-L}{2^j}}^{x}\Big[t - \frac{k-L}{2^j}\Big]^{R-1}\psi(2^j t - k)dtdx \\
&= \frac{1}{(R-1)!}\frac{1}{2^{j(R-1)}}\int_{\frac{k-L}{2^j}}^{\frac{k+L}{2^j}} f^{(R)}(x)\int_{\frac{k-L}{2^j}}^{x}\Big[(2^j t - k) + L\Big]^{R-1}\psi(2^j t - k)dtdx \\
&= \frac{1}{(R-1)!}\frac{1}{2^{j(R-1)}}\int_{\frac{k-L}{2^j}}^{\frac{k+L}{2^j}} f^{(R)}(x)\int_{\frac{k-L}{2^j}}^{x}\Big[2^j t - k\Big]^{R-1}\psi(2^j t - k)dtdx \\
&= \frac{1}{(R-1)!}\frac{1}{2^{j(R-1)}}\frac{1}{2^j}\int_{\frac{k-L}{2^j}}^{\frac{k+L}{2^j}} f^{(R)}(x)\int_{\frac{k-L}{2^j}}^{x}\Psi(2^j t - k)dtdx \\
&= \frac{1}{(R-1)!}\frac{1}{2^{jR}}\int_{\frac{k-L}{2^j}}^{\frac{k+L}{2^j}} f^{(R)}(x)\int_{\frac{k-L}{2^j}}^{x}\Psi(2^j t - k)dtdx.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder à ce résultat nous obtenons

$$\begin{aligned}
|\langle f(x), \psi(2^j x - k)\rangle| &\leqslant \frac{1}{(R-1)!}\frac{1}{2^{jR}}\Big(\int_{\frac{k-L}{2^j}}^{\frac{k+L}{2^j}} |f^{(R)}(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_{\frac{k-L}{2^j}}^{x} |\Psi(2^j t - k)|^{\frac{p}{p-1}}dt\Big)^{1-\frac{1}{p}} \\
&= \frac{1}{(R-1)!}\frac{1}{2^{jR}}\frac{1}{2^{j(1-\frac{1}{p})}}\Big(\int_{\frac{k-L}{2^j}}^{\frac{k+L}{2^j}} |f^{(R)}(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_{\frac{k-L}{2^j}}^{x} |\Psi(u)|^{\frac{p}{p-1}}dt\Big)^{1-\frac{1}{p}} \\
&= \frac{1}{(R-1)!}\frac{1}{2^{j(R+1-\frac{1}{p})}}\|f(x)\|_p\|\Psi\|_{\frac{p}{p-1}}.
\end{aligned}$$

En posant $p = 2$ on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en prenant donc $C =$

$\frac{1}{(R-1)!}\|\Psi\|_{\frac{p}{p-1}}$ et $m = 2^j$, on obtient

$$|\langle f(x), \psi(2^j x - k)\rangle| \leqslant C\|f(x)\|_{C^R} m^{-(R+\frac{1}{2})}.$$

Une fonction f est alors approximée d'une manière optimale dans une base orthonormée $\{\psi_n : n \in \mathbb{Z}\}$ de $L^2(\mathbb{R})$. Soit f_N la projection de f sur les N vecteurs dont les indices sons dans I_N :

$$f_N = \sum_{n \in I_N} \langle f, \psi_n\rangle \tilde{\psi}_n. \tag{1.34}$$

1.3.2 Erreur de l'approximation non-linéaire

Pour que l'erreur soit optimale , il faut que les indices dans I_N correspondent aux N vecteurs aient les plus grands produits scalaires en valeur absolue par rapport à la fonction f ($|\langle f, \psi_n\rangle|$). Ce sont les vecteurs les mieux corrélés à f. L'erreur résultante $\varepsilon_n[N]$ est alors nécessairement plus petite que l'erreur de l'approximation linéaire obtenue en choisissant N vecteurs d'approximation indépendamment de f. En classant les valeurs $\{|\langle f, \psi_n\rangle|\}_{n\in\mathbb{N}}$ par ordre décroissant . L'erreur est définie par :

$$\varepsilon[N] = \|f - f_N\|_{L^2}^2 \leqslant C \sum_{m \notin I_N} |\langle f, \psi_m\rangle|^2.$$

En utilisant les relations ci-haut obtenues on a :

$$\begin{aligned} \|f - f_N\|_2^2 &\leqslant C \sum_{m \notin I_N} |\langle f, \psi_m\rangle|^2 \\ &= C\|f\|_{C^R}^2 \Big(\sum_{m \notin I_N} 2^{-m(R+\frac{1}{2})} \Big)^2 \\ &\leqslant C\|f\|_{C^R}^2 \Big(\sum_{m \notin I_N} 2^{m(1+\frac{1}{2R})} \Big)^{-2R} \\ &= C\|f\|_{C^R}^2 M^{-2R} \end{aligned} \tag{1.35}$$

où $M = \sum_{m \notin I_N} \left(2^{m(1+\frac{1}{2R})}\right)^{-2R}$.

Remarquablement, ce résultat est aussi valable si f est R fois continûment différentiable et présente de nombreux points de discontinuités. Autrement dit, l'approximation en ondelettes se comporte comme si les fonctions n'avaient pas de discontinuités. Ce comportement est très différent de l'approximation en séries de Fourier, dans ce cas le taux d'erreur est de l'ordre de $O(N^{-2})$. Ce résultat peut être étendu en plusieurs dimensions comme on le verra dans la suite.

Une autre propriété importante d'une AMR est qu'il permet une mise en œuvre efficace d'une décomposition algorithmique en ondelettes. Pour expliquer cela, supposons que ψ est ondelette à support compact associée à une fonction échelle ϕ. Comme ϕ et ψ sont dans V_1, il s'en suit que $D_{-1}\phi$ et $D_{-1}\psi$ sont dans V_0. Examinons donc les équations (1.41,1.58), qui, dans le domaine temporel, peuvent être écrites comme :

$$\begin{aligned}(D_{-1}\phi)(x) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\phi(\tfrac{x}{2}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\phi(x-k),\\ (D_{-1}\psi)(x) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\psi(\tfrac{x}{2}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k\psi(x-k),\end{aligned} \tag{1.36}$$

où seul un nombre fini de coefficients a_k et b_k sont non nuls. Comme D_{-1} est unitaire, de ces deux dernières relation, nous obtenons :

$$\begin{aligned}a_k &= \langle (D_{-1}\phi), T_k\phi\rangle = \langle (D_{j-1}\phi), D_jT_k\phi\rangle,\\ b_k &= \langle (D_{-1}\psi), T_k\psi\rangle = \langle (D_{j-1}\psi), D_jT_k\phi\rangle.\end{aligned}$$

Nous voyons donc qu'il y a deux bases orthonormées pour $V_j = W_{j-1} \oplus V_{j-1}$; ces bases sont $D_j\mathcal{T}_\phi$ et $D_{j-1}\mathcal{T}_\psi \cup D_j\mathcal{T}_\phi$. Des relations (1.36) nous pouvons calculer les matrices de changement de bases obtenues à partir des deux bases orthonormées (tout en sachant que l'ordre de dilatation et de translation est important : $D_1T_k = T_{2k}D_1$). Pour une fonction à support compact donnée $f \in V_j$ nous appliquons la matrice de changement de base appropriée pour calculer la projection orthogonale f_{j-1} de f_0 dans V_{j-1} et obtenir le "*terme de correction*" $e_{j-1} = f_j - f_{j-1} \in W_{j-1}$. Les itérations de cette procédure nous

montrent que les manipulations arithmétiques avec les ensembles finis de coefficients sont tous ceux qui sont impliqués au calcul de $f_0 \in V_0$ et $e_i \in W_i$, $0 \leqslant i \leqslant j-1$ de sorte que $f_j = f_0 + e_1 + \cdots + e_{j-1}$. Avec les excellentes propriétés d'approximation en ondelettes, cette technique remarquablement simple est l'une des principales raisons pour lesquelles les ingénieurs ont adopté les ondelettes (en particulier, les ondelettes bi-orthonormales à supports compactes [10]) dans la conception de la norme $JPEG2000$, le standard industriel pour la compression des images, remplaçant ainsi l'ancien de Fourier basé sur la norme $JPEG$ standard.

Une autre propriété de l'ARM en ondelettes est que, considérées comme éléments d'un sous-ensemble sphère unité dans $L^2(\mathbb{R})$, ils forment un ensemble connecté par arcs. En particulier, il n'est pas difficile de montrer qu'existent des chemins continus d'ondelettes. Supposons que l'ondelette ψ et $\tilde{\psi}$ sont deux ondelettes dans la même AMR. Alors on peut facilement montrer que $(\tilde{\psi})^\wedge = s\widehat{\psi}$, où s est ne fonction unimodulairede période 1. En particulier, nous pouvons choisir une fonction θ de période 1 pour laquelle $(\tilde{\psi})^\wedge = e^{i\theta}\widehat{\psi}$ et l'ensemble $s^t = e^{it\theta}$, pour $t \in [0,1]$, pour établir un chemin continu $t \mapsto (s^t\widehat{\psi})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ connectant ψ à $\tilde{\psi}$. Un argument plus complexe montre comment ψ est en permanence relié à l'ondelette de Haar [21].

D'autres questions se posent à ce sujet. Par exemple : " Est-ce que toutes les ondelettes orthonormées sont connectées ?, Est-ce que deux cadres d'ondelettes quelconques sont-elles connectées ?" La réponse à cette dernière question est oui, alors que la précédente est encore un problème ouvert.

Avant de passer aux ondelettes en plusieurs dimensions, notons qu'il y a beaucoup d'autres sujets sur les ondelettes uni-dimensionnelles que nous n'avons pas discutés dans

ce travail. En particulier, il y a des ondelettes ne résultant pas d'une AMR. Aussi, les ondelettes peuvent être définies en remplaçant dilatations dyadiques avec dilatations par $r > 1$, où r n'a pas besoin être un nombre entier. Dans la situation des dilatations non-dyadiques, la construction une base orthonormée associée aux ondelettes peut exiger plus d'une génératrice ; à savoir, si $r = \frac{p}{q} > 1$ et p, q sont premiers, alors $p - q$ générateurs sont nécessaires.

CHAPITRE 2

Les Ondelettes dans $L^2(\mathbb{R}^n)$

Un grand nombre de concepts vus dans le premier chapitre peuvent s'étendre naturellement à n dimensions ($n \in \mathbb{N}, n > 1$) où les $\mathbb{Z}$-translations sont remplacées par $\mathbb{Z}^n$-translations et où l'ensemble de dilatations $\{2^j, j \in \mathbb{Z}\}$ est remplacé par l'ensemble $\{u^j, j \in \mathbb{Z}\}$ où $u \in M_{n\times n}$ une matrice réelle dont chacune de ses valeurs propres est supérieure à 1. Pour des raisons théoriques et pratiques, il est plus commode de concentrer notre attention sur les cadres de Parseval en ondelettes plutôt que sur les ondelettes orthonormées. Étant donnée la matrice u, on a la définition suivante

Définition 2.1 (Matrice de dilatation) *Une matrice de dilatation est une matrice entière non singulière telle que la valeur absolue de chacune de ses valeurs propres est supérieure à 1. Le facteur de dilatation surfacique(volumique,...) est* $|\det u|$.

Nous définissons ainsi les fonctions $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ pour lesquelles le système d'ondelettes :

$$\{\psi_{j,k}(x) = D_u^j T_k \psi(x) = |\det u|^{\frac{j}{2}} \psi(u^j x - k), j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n, x \in \mathbb{R}^n\} \tag{2.1}$$

est un cadre de Parseval. Autrement dit

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}^n}|\langle f, D_u^j T_k\psi\rangle|^2 = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

La contrainte sur les valeurs propres dans la définition ci-dessus assure la dilatation dans chaque dimension. Par exemple $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice de dilatation valide, car les dilatation sont dans une seule direction, alors que $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice de dilatation valide et ses dilatations suivent toutes (les deux) dimensions.

2.1 Analyse Multi-Résolution

Définition 2.2 (AMR) *Soit u une matrice de dilatation. Une suite de $\{V_j^n\}_{j\in\mathbb{Z}}$ des espaces fermés de $L^2(\mathbb{R}^n)$ est une AMR associée à la matrice de dilatation u si les propriétés suivantes sont vérifiées*

1. $\forall j \in \mathbb{Z}, V_{j-1}^n \subset V_j^n$;
2. *(Séparation) :* $\lim\limits_{j\longrightarrow\infty} V_j^n = \{0\}$. *C'est à dire* $\cap_{j\in\mathbb{Z}} V_j^n = \{0\}$;
3. *(Densité) :* $\lim\limits_{j\longrightarrow-\infty} V_j = \overline{\cup_{j\in\mathbb{Z}} V_j^n} = L^2(\mathbb{R}^n)$;
4. *(Invariance d'échelle) :* $\forall j \in \mathbb{Z}, \quad f(x) \in V_j^n \Leftrightarrow f(ux) \in V_{j+1}^n$;
5. *(Invariance par translation) :* $\forall k \in \mathbb{Z}^n, \quad f(x) \in V_0^n \Leftrightarrow f(x-k) \in V_0^n$;
6. *Il existe ϕ telle que $\{\phi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ est une base orthonormée de V_0^n. De plus on suppose que* $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx \neq 0$.

Exemple 2.1 (Approximations constantes par morceaux)

Dans le cas multidimensionnel, l'AMR la plus simple est associée aux approximations constantes par morceaux. Dans ce cas, l'espace V_0^n est constitué de toutes les fonctions

$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ telles que f est constante sur les régions de la forme $k + [0,1)^n$, où $k \in \mathbb{Z}^n$. Plus généralement, V_j^n est constitué de toutes les fonctions $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ telles que f est constante sur les régions de la forme $|\det u|^{\frac{j}{2}}(k+[0,1)^n)$, où $k \in \mathbb{Z}^n$. La base orthonormée de V_0^n est donnée par $\{\phi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$, où

$$\phi(x) = \chi_{[0,1)^n}(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [0,1)^n \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

2.1.1 Espace d'ondelettes

Considérons une AMR associée à la matrice de dilatation u et une suite d'espaces $\{V_j^n\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Si V_{j-1}^n un sous espace propre de V_j^n, il existe donc un espace W_{j-1}^n, le complément orthogonal de V_j^n dans V_{j-1}^n. En d'autres termes, nous avons

$$V_j^n = V_{-1}^n \oplus W_{j-1}^n.$$

Malheureusement, si $|\det u| > 2$, il n'est pas possible pour les translations de vecteur entier d'une simple fonction forment une base de W_0^n. En fait, nous avons besoin de vecteurs-entiers invariants de $|\det u| - 1$ fonctions. Ainsi, nous devons décomposer davantage l'espace W_0^n dans $|\det u| - 1$ sous-espaces $\{W_{l0}^n : l \in \{1, 2, ..., |\det u| - 1\}\}$. Nous avons donc

$$W_0^n = \bigoplus_{l=1}^{|\det u|-1} W_{l0}^n. \tag{2.2}$$

Cela conduit à la relation

$$V_j^n = V_{j-1}^n \oplus \Big(\bigoplus_{l=1}^{|\det u|-1} W_{lj-1}^n \Big).$$

Ainsi, nous avons maintenant $|\det u| - 1$ espaces d'ondelettes à chaque niveau de l'ARM. En d'autres termes, on obtient la décomposition de $L^2(\mathbb{R}^n)$ illustré sur la figure précé-

dente. Les différents espaces ont les propriétés suivantes :

$$V_j^n \cap V_k^n = V_k^n \quad pour \quad k < j;$$
$$W_{jk}^n \cap W_{pq}^n = 0 \quad pour \quad (j,k) \neq (p,q) \quad et$$
$$V_j^n \cap W_{pq}^n = 0 \quad pour \quad j \geqslant q.$$

En outre, les espaces d'ondelettes ont un certain nombre d'autres propriétés importantes données par le théorème suivant

Théorème 2.2 (Propriétés des espaces d'ondelettes) *Soit* $\{W_{lj}^n : (l,j) \in \{1,2,...,|\det u|-1\} \times \mathbb{Z}\}$ *les espaces d'ondelettes associés à l'AMR de matrice de dilatation* u*. Alors, ces espaces sont tels que*

1. *(Densité) :* $\overline{\left(\bigoplus_{(l,j)\in\{1,2,...,|\det u|-1\}\times\mathbb{Z}} W_{lj}^n\right)} = L^2(\mathbb{R}^n)$ *;*
2. *(Invariance d'échelle) : Pour chaque* $l \in 1,2,...,|\det u|-1$, $f(x) \in W_{lj}^n \Leftrightarrow f(ux) \in W_{lj+1}^n$ *;*
3. *(Invariance par translation) : Pour chaque* $l \in 1,2,...,|\det u|-1$, $f(x) \in W_{lj}^n \Leftrightarrow f(x-k) \in W_{lj}^n$ *pour tout* $k \in \mathbb{Z}^n$, $j \in \mathbb{Z}$ *;*
4. *Pour chaque* $l \in 1,2,...,|\det u|-1$*, il existe* ψ^l *telle que* $\{\psi^l(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ *est une base orthonormée de* W_{l0}^n *;*

La base de chaque espace W_{l0}^n est générée par les translatées de la fonction ψ^l. Nous nous référons à la fonction ψ^l comme ondelette. Notez que nous avons $|\det u|-1$ fonctions d'ondelettes (car il y a $|\det u|-1$ espaces d'ondelettes à chaque niveau dans l'AMR).

2.1.2 Fonction l'échelle et les espaces d'ondelettes

Considérons une AMR $\{V_j^n : j \in \mathbb{Z}\}$ associée à la matrice dilatation u. Soit $\{\phi(x-k) : k \in \mathbb{Z}^n\}$ une base orthonormée de V_0^n. Pour chaque $l \in 1,2,...,|\det u|-1$,

considérons que $\{\psi^l(x-k) : k \in \mathbb{Z}^n\}$ désigne la base orthonormée de W_{l0}^n . Supposons que $\phi(x)$ et $\{\psi^l(x)\}_{l\in\{1,2,\ldots,|\det u|-1\}}$ sont connues. Puis, comme dans le cas unidimensionnel, nous pouvons déterminer une base pour chacun d'autres espaces d'approximation en ondelettes. Dans le contexte multidimensionnel, nous avons le résultat suivant.

Théorème 2.3 *Soient $\{V_j^n : j \in \mathbb{Z}\}$ une AMR associée à la matrice de dilatation u et $\{\phi(x-k) : k \in \mathbb{Z}^n\}$ une base orthonormée de V_0^n dont la base duale est $\{\tilde{\phi}(x-k) : k \in \mathbb{Z}^n\}$. Alors pour l'ensemble $\{\phi_{jk} : k \in \mathbb{Z}^n\}$ des fonctions données par*

$$\phi_{jk}(x) = |\det u|^{\frac{j}{2}}\phi(u^j x - k)$$

est une base orthonormée de V_j^n et la base duale $\{\tilde{\phi}_{jk} : k \in \mathbb{Z}^n\}$ est

$$\tilde{\phi}_{jk}(x) = |\det u|^{\frac{j}{2}}\tilde{\phi}(u^j x - k)$$

Où $u \in M_{n\times n}$, $k \in \mathbb{Z}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

Maintenant, nous considérons les bases les espaces d'approximation en ondelettes. La base de chacun de ces espaces peut être déterminée comme dans le théorème suivant

Théorème 2.4 *Soient $\{V_j^n : j \in \mathbb{Z}\}$ une AMR associée à la matrice de dilatation u avec les espaces d'ondelettes $\{W_{lj}^n : (l,j) \in \{1,2,\ldots|\det u|-1\} \times \mathbb{Z}\}$ et $\{\psi^l(x-k) : k \in \mathbb{Z}^n\}$ une base orthonormée de W_{l0}^n dont la base duale est $\{\tilde{\psi}^l(x-k) : k \in \mathbb{Z}^n\}$. Alors l'ensemble $\{\psi_{jk}^l : k \in \mathbb{Z}^n\}$ des fonctions données par*

$$\psi_{jk}^l(x) = |\det u|^{\frac{j}{2}}\psi^l(u^j x - k)$$

est une base orthonormée de W_{lj} et la base duale $\{\tilde{\psi}_{jk}^l : k \in \mathbb{Z}^n\}$ est

$$\tilde{\psi}_{jk}^l(x) = |\det u|^{\frac{j}{2}}\tilde{\psi}^l(u^j x - k)$$

Où $u \in M_{n\times n}$, $k \in \mathbb{Z}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

Dans ce qui suit nous nous contentons à travailler dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ et le cas dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ sera déduit par généralisation.

2.2 Ondelettes séparables dans $L^2(\mathbb{R}^2)$

En général, à toute base orthonormée d'ondelettes $\{\psi_{jk}(x) : j, k \in \mathbb{Z}\}$ de $L^2(\mathbb{R})$, nous pouvons associer une base orthonormée d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$\{\psi_{j_1k_1}(x)\psi_{j_2k_2}(y); j_1, j_2, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

Cependant, les fonctions $\psi_{j_1,k_1}(x)\psi_{j_2,k_2}(y)$ mélangent les informations à deux échelles différentes j_1 et j_2 le long de x et y, ce que l'on préfère souvent éviter. L'AMR séparable conduit à une autre construction de base d'ondelettes séparables, dont les éléments sont des produits des fonctions dilatées à la même échelle.

2.2.1 Analyse Multi-Résolutions

Comme en dimension 1, la notion d'AMR se formalise avec des projections orthogonales sur des espaces de tailles variables. L'approximation d'une fonction $f(x, y)$ à la résolution 2^{-j} est définie comme la projection de f sur un espace V_j^2 inclus dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. L'espace V_j^2 est un ensemble de toutes les approximations à la résolutions 2^{-j}. La taille de V_j^2 diminue quand la résolution diminue. La définition formelle d'une AMR $\{V_j^2 : j \in \mathbb{Z}\}$ de $L^2(\mathbb{R}^2)$ est une extension directe de la définition 1.1 de l'AMR dans $L^2(\mathbb{R})$. On exige les mêmes propriétés de causalité, de complétude et de changement d'échelle.

2.2.2 Produit tensoriel

Les produits tensoriels sont utilisés pour étendre des espaces unidimensionnelles à des espaces multidimensionnels. Un produit tensoriel $f_1 \otimes f_2$ entre deux vecteurs de deux espaces de Hilbert $\mathbb{H}_1$ et $\mathbb{H}_2$ vérifie les propriétés suivantes

1. Linéarité : $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda(f_1 \otimes f_2) = (\lambda f_1) \otimes f_2 = f_1 \otimes (\lambda f_2)$.

2. Distributivité : $(f_1 + g_1) \otimes (f_2 + g_2) = (f_1 \otimes f_2) + (f_1 \otimes g_2) + (g_1 \otimes f_2) + (g_1 \otimes g_2)$.

Ce produit tensoriel définit un nouvel espace de Hilbert $\mathbb{H} = \mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2$ contenant tous les vecteurs de la forme $(f_1 \otimes f_2)$ où $f_1 \in \mathbb{H}_1$ et $f_2 \in \mathbb{H}_2$ ainsi que toutes les combinaisons linéaires de tels vecteurs. Un produit scalaire sur $\mathbb{H}$ se déduit des produits scalaires sur $\mathbb{H}_1$ et $\mathbb{H}_2$ par

$$\langle f_1 \otimes f_2, g_1 \otimes g_2 \rangle_{\mathbb{H}} = \langle f_1, g_1 \rangle_{\mathbb{H}_1} \langle f_2, g_2 \rangle_{\mathbb{H}_2}.$$

Dans cette section, nous considérons le cas particulier de l'AMR séparable. Soit $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ une AMR dans $L^2(\mathbb{R})$. Une AMR séparable en dimension 2 est constituée des produits tensoriels

$$V_j^2 = V_j \otimes V_j.$$

L'espace V_j^2 est l'ensemble des fonctions finies $f(x, y)$, combinaisons linaires de fonctions séparables

$$f(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k f_m(x) g_m(y) \quad avec \quad f_m \in V_j, \quad g_m \in V_j.$$

2.2.3 Base d'ondelettes séparables dans $L^2(\mathbb{R}^2)$

Une base d'ondelettes séparables de $L^2(\mathbb{R}^2)$ est construite à partir de produits d'une fonction d'échelle ϕ et d'une ondelette ψ. La fonction d'échelle est associée à une AMR $\{V_j; j \in \mathbb{Z}\}$ de $L^2(\mathbb{R})$. Soit $\{V_j^2 : j \in \mathbb{Z}\}$ l'AMR de $L^2(\mathbb{R}^2)$ définie par $V_j^2 = V_j \otimes V_j$. Considérons les espace d'approximation W_{j-1}^2 égaux aux compléments orthogonaux des V_{j-1}^2 dans V_j^2 :

$$V_j^2 = V_{j-1}^2 \oplus W_{j-1}^2.$$

Afin de construire une base d'ondelettes orthonormées de $L^2(\mathbb{R}^2)$, le théorème suivant donne la construction d'une base orthonormée d'ondelettes pour chaque espace d'approximation W_j^2.

Théorème 2.5 *Soit ϕ une fonction d'échelle, et ψ l'ondelette correspondante engendrant une base d'ondelettes orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$. On définit trois ondelettes :*

$$\Psi^1(x,y) = \psi(x)\phi(y), \qquad \Psi^2(x,y) = \phi(x)\psi(y), \qquad \Psi^3(x,y) = \psi(x)\psi(y) \tag{2.3}$$

et on pose, pour $1 \leqslant l \leqslant 3$

$$\psi^l_{j,k} = |\det u|^{\frac{j}{2}} \psi^l\big(u^j x - k_1, u^j y - k_2\big).$$

La famille d'ondelettes

$$\{\Psi^1_{j,k_1}, \Psi^2_{j,k_2}, \Psi^3_{j,k_3} : \ k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}^2\}$$

est une base orthonormée de W_j^2, et

$$\{\Psi^1_{j,k_2}, \Psi^2_{j,k_2}, \Psi^3_{j,k_3} : j \in \mathbb{Z}; \ k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}^2\}$$

est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Démonstration. D'après la propriété de distributivité du produit tensoriel, l'espace $V_j^2 = V_j \otimes V_j$ peut aussi se décomposer comme suit :

$$\begin{aligned} V_j^2 &= V_j \otimes V_j \\ &= \big(V_{j-1} \oplus W_{j-1}\big) \otimes \big(V_{j-1} \oplus W_{j-1}\big) \\ &= V_{j-1} \otimes V_{j-1} \oplus [(W_{j-1} \otimes V_{j-1}) \oplus (V_{j-1} \otimes W_{j-1}) \oplus (W_{j-1} \otimes W_{j-1})] \\ &= V_{j-1}^2 \oplus W_{j-1}^2. \end{aligned}$$

On a donc que

$$W_j^2 = (W_j \otimes V_j) \oplus (V_j \otimes W_j) \oplus (W_j \otimes W_j). \tag{2.4}$$

Comme $\{\phi_{j,m} : m \in \mathbb{Z}\}$ et $\{\psi_{j,n} : n \in \mathbb{Z}\}$ sont respectivement des bases orthonormées de V_j et de W_j , on en déduit que

$$\{\psi_{j,k_1}(x)\phi_{j,k_2}(y), \quad \phi_{j,k_1}(x)\psi_{j,k_2}(y), \quad \psi_{j,k_1}(x)\phi_{j,k_1}(y) : \ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^2\}$$

est une base orthonormée de W_j^2. L'espace $L^2(\mathbb{R}^2)$ peut se décomposer comme la somme directe des espaces de détail W_j^2.

$$L^2(\mathbb{R}^2) = \overline{\bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j^2}.$$

Donc

$$\{\psi_{j,k_1}(x)\phi_{j,k_2}(y), \quad \phi_{j,k_1}(x)\psi_{j,k_2}(y), \quad \psi_{j,k_1}(x)\psi_{j,k_1}(y) : \ j \in \mathbb{Z}, \ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^2\}$$

est un base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^2)$ ■

Les trois ondelettes extraient des détails de la fonction suivant des échelles et des orientations différentes. Si l'ondelette unidimensionnelle $\psi(t)$ est à support compact de longueur K alors les trois ondelettes bidimensionnelles Ψ^l ont des support compact carré de même longueur. Sur les fréquences positives, $\widehat{\phi}$ et $\widehat{\psi}$ ont une même énergie essentiellement concentré respectivement sur $[0, \frac{1}{2}]$ et $[\frac{1}{2}, 1]$. Les expressions (2.3) impliquent que

$$\widehat{\psi}^1(\xi_1, \xi_2) = \widehat{\phi}(\xi_1)\widehat{\psi}(\xi_2), \quad \widehat{\psi}^2(\xi_1, \xi_2) = \widehat{\psi}(\xi_1)\widehat{\phi}(\xi_2), \quad \widehat{\psi}^2(\xi_1, \xi_2) = \widehat{\psi}(\xi_1)\widehat{\psi}(\xi_2).$$

Soit par exemple $n = 2$ et $u = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On aura donc $u(x, y) = (2x, 2y)$ et $u^j(x, y) = (2^j x, 2^j y)$ et la famille de fonctions dilatées-translatées sera notée :

$$\phi_{j,k_1,k_2}(x, y) = 4^{\frac{j}{2}}\phi(2^j x - k_1, 2^j y - k_2).$$

L'opération de dilatation agissant de façon indépendante suivant les deux directions, on créé une AMR en deux dimensions en choisissant comme fonction d'échelle le produit de deux fonctions d'échelle à une variable

$$\phi_{j,k_1,k_2}(x, y) = 2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j x - k_1)2^{\frac{j}{2}}.\phi(2^j y - k_2)$$

soit

$$\phi_{j,k_1,k_2}(x,y) = \phi_{j,k_1}(x)\phi_{j,k_2}(y).$$

La famille de sous-espaces ainsi construite est le produit tensoriel des sous-espaces à une dimension suivant x et suivant y.

$$\begin{aligned} V_j^2 &= V_j \otimes V_j = V_{j-1} \otimes V_{j-1} \oplus [(W_{j-1} \otimes V_{j-1}) \oplus (V_{j-1} \otimes W_{j-1}) \oplus (W_{j-1} \otimes W_{j-1})] \\ &= V_{j-1}^2 \oplus W_{j-1}^2. \end{aligned}$$

On constate que, comme prévu, les base des sous-espaces d'approximations (ondelettes) seront constituées par trois familles d'ondelettes :

$$\begin{aligned} \psi^h(x,y) &= \phi(x)\psi(y) \\ \psi^v(x,y) &= \psi(x)\phi(y) \\ \psi^d(x,y) &= \psi(x)\psi(y). \end{aligned}$$

La décomposition discrète d'une fonction considérée comme approximation de la fonction de départ a^j fournit à chaque étape quatre images, l'une correspond à l'approximation supérieure a^{j+1} et les trois autres sont constituées des coefficients de la décomposition en ondelettes et contiennent les approximations perdues lors du passage d'une résolution à la suivante. Ces approximations sont orientées horizontalement d_{j+1}^h (correspondant à $\psi^h(x,y)$), verticalement d_{j+1}^v (correspondant à $\psi^v(x,y)$) ou en diagonal d_{j+1}^d (correspondant à $\psi^d(x,y)$).

	d_{j+1}^v	d_{j+1}^d
a_j	a_{j+1}	d_{j+1}^h

2.3 Ondelettes à dilatations composées

Dans cette section, nous nous référons au référence [36]. Nous considérons $c \in GL_n(\mathbb{R})$ et soit Γ un treillis dans $\mathbb{R}^n$ obtenu en faisant le produit des éléments $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et les éléments de $\mathbb{Z}^n$ $(\Gamma = M\mathbb{Z}^n)$. Pour toute fonction $\psi(x) \in \mathbb{R}^n$, nous considérons les opérateurs suivants sur $L^2(\mathbb{R}^n)$

• Les translations : T_γ $(\gamma \in \Gamma)$ définies pour $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ par

$$T_\gamma(\psi(x)) = \psi(x - \gamma)$$

• Les dilatations : D_c $(c \in GL_n(\mathbb{R}))$ définies pour $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ par

$$(D_c(\psi(x)) = |\det c|^{-\frac{1}{2}}\psi(cx)$$
$$(D_c^j(\psi(x)) = |\det c|^{-\frac{j}{2}}\psi(c^j x), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Si $C \subset GL_n(\mathbb{R})$ et $\Psi = \{\psi^1, \psi^2, \ldots, \psi^L\} \subset L^2(\mathbb{R}^n)$, alors le système affine $\{D_c T_\gamma \psi^l : c \in C, \gamma \in \Gamma, l = 1, 2 \ldots, L\}$ est appelé *système d'ondelettes orthonormées* ou simplement *système affine avec dilatations composées*, si et seulement si c'est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Ici, nous nous intéressons au cas où $C = AB = \{ab, a \in A, b \in B\}$ où $A \subset GL_n(\mathbb{R})$ est une classe de matrice $n \times n$ avec les propriétés de dilatations et $B \subset GL_n(\mathbb{R})$ une classe de matrice $n \times n$ telle que $\det b = 1$ (voir [27]).

2.3.1 Analyse Multi-Résolution

L'AMR associée à une suite de dilatations $\{a^j : j \in \mathbb{Z}\}$ est une suite croissante de sous-espaces fermés $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ de telle sorte que :

1. $V_j^n = D_a^j V_0^n$;

2. $V_j^n \in V_{j+1}^n$;

3. $\overline{\cup_{j\in\mathbb{Z}} V_j^n} = L^2(\mathbb{R}^n)$;

4. $\cap_{j\in\mathbb{Z}} V_j^n = \{0\}$;

5. Il existe $\phi \in V_0^n$ telle que $\{T_\gamma \phi(x) : \gamma \in \Gamma\}$ est une base orthonormée de V_0^n

La dernière propriété montre que V_0^n est un espace invariant par translation généré par la fonction ϕ.

Dans le cas de dilatation composée la notion d'invariance par translation est remplacée par un concept plus général. Comme $B(\Gamma) = \Gamma$, l'opérateur généré par les dilatations $D_b, b \in B$, et les translations $T_\gamma, \gamma \in \Gamma$, forment un groupe. En fait, on a que :

$$\begin{aligned}
(D_c T_\tau)(D_b T_\gamma)\psi(x) &= (D_c T_\tau)|\det b|^{-\frac{1}{2}}\psi(bx - b\gamma) \\
&= |\det c|^{-\frac{1}{2}}|\det b|^{-\frac{1}{2}}\psi(cbx - cb(\gamma + b^{-1}\tau)) \\
&= D_{cb}T_{\gamma+b^{-1}\tau}\psi(x).
\end{aligned}$$

Cela nous permet de définir l'opération sur le produit cartésien $B \times \Gamma$:

$$(c, \tau).(b, \gamma) = (cb, b^{-1}\tau + \gamma).$$

Nous obtenons un nouveau groupe que nous désignons par $B\Gamma$ (il est, en fait le produit semi-direct de B et Γ). Cela nous amène à la notion des espaces $B\Gamma$-invariant qui sont les sous-espaces fermés $V^n \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ tels que $D_b T_\gamma \psi \in V^n$ pour tout $\psi \in V^n$, $b \in B$ et $\gamma \in \Gamma$. Cette notion, à son tour, nous amène à la version plus générale de la cinquième propriété.

5′. Il existe $\psi \in V_0^n$ telle que $\{D_b T_\gamma \psi : \ b \in B \ et \ \gamma \in \Gamma\}$, est une base orthonormée de V_0^n.

Ainsi, V_0^n est un espace $B\Gamma$-invariant engendré par ϕ. La notion la plus générale de l'AMR associée aux ensembles de dilatations $A = \{a^j : j \in \mathbb{Z}\}$ et du groupe $B \subset$

$GL_n(\mathbb{R})$, appelé AB-AMR, est une collection croissante des sous espaces fermés $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R}^n)$ satisfaisant aux conditions $1, 2, 3, 4$ *et* $5'$. L'espace V_0^n n'est pas généré par les Γ-translations de la fonction ϕ. En effet, les générateurs sont, l'ensemble des fonctions $D_b\phi, b \in B$ car on observe que $D_bT_\gamma\phi = T_{b\gamma}D_b\phi$ et $B(\Gamma) = \Gamma$. Pour comprendre ces concepts , nous construisons les deux exemples suivants dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.

2.3.2 Exemple 1 : Ondelette de type-Haar associée à la matrice de quinconce

Comme dans le cas unidimensionnel, nous évitons des ondelettes génératrices multiples en nous limitant au cas d'une matrice de dilatation u dont $\det u = 2$. Nous nous inspirons de [36] et nous considérons le système affine à dilatation composée pour lequel la matrice a est une matrice de quinconce : $a = q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ représentant la matrice de rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ dans le sens des aiguilles d'une montre, normalisé pour avoir $\det q = 2$ et pour lequel $B = \{b_i : i = 1, \cdots, 7\}$ est le groupe des symétries du carré :

$$b_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et $b_i = -b_{i-4}$ pour $i = 4, 5, 6, 7$.

Soit R_0 le triangle de sommets $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$ *et* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et $R_i = b_iR_0$ pour $i = 1, \cdots, 7$. Si $\varphi(x) = 2\sqrt{2}\chi_{R_0}$, nous prétendons que le système $\{D_bT_k\varphi(x) : b \in B, k \in \mathbb{Z}^2\}$ est une base orthonormée de l'espace V_0. V_0 est donc un espace de toutes les fonctions de carré intégrable qui sont constantes sur chaque $\mathbb{Z}^2$-translations des triangles R_i; $i = 1, \ldots, 7$. Considérons maintenant les espaces $V_j = D_q^jV_0; j \in \mathbb{Z}$.

L'espace V_{-1} contient toutes les fonctions de carré sommables qui sont constantes sur chaque $q^{-1}\mathbb{Z}^2$-translations des triangles R_i; $i = 1, \cdots, 7$. On a que $V_{-1} \subset V_0$ et par conséquent $V_{j-1} \subset V_j$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$.

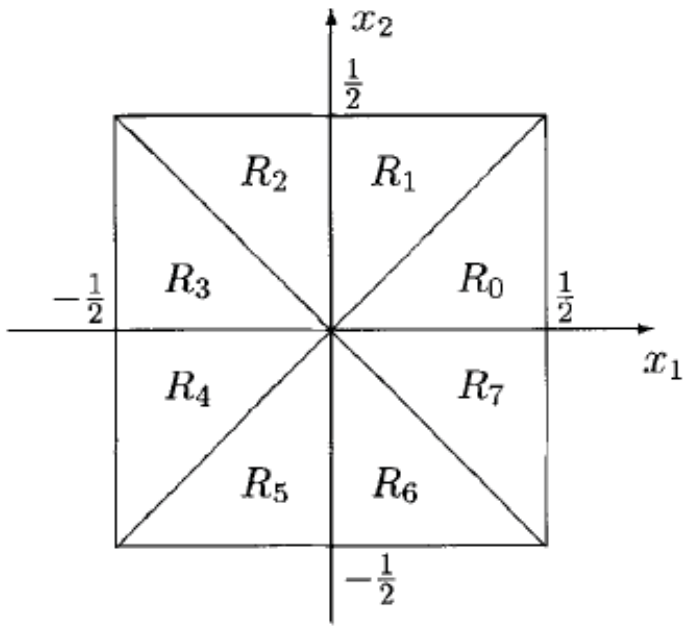

Figure 2.1 – Région fondamentale R_0 et ses images par B [36].

Soit donc le vecteur colonne

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} D_{b_0}\varphi(x) \\ D_{b_1}\varphi(x) \\ \vdots \\ D_{b_7}\varphi(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^0(x) \\ \varphi^1(x) \\ \vdots \\ \varphi^7(x) \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

une fonction échelle à valeur matricielle pour cette AMR. En observant la figure ci-haut, on constate que :

$$R_0 = q^{-1}R_1 \cup \left[q^{-1}R_6 + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right] = q^{-1}R_1 \cup q^{-1}\left[R_6 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]. \tag{2.6}$$

Cette équation implique que

$$\chi_{R_0}(x) = \chi_{q^{-1}R_1}(x) + \chi_{q^{-1}\left(R_6 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}(x) \tag{2.7}$$

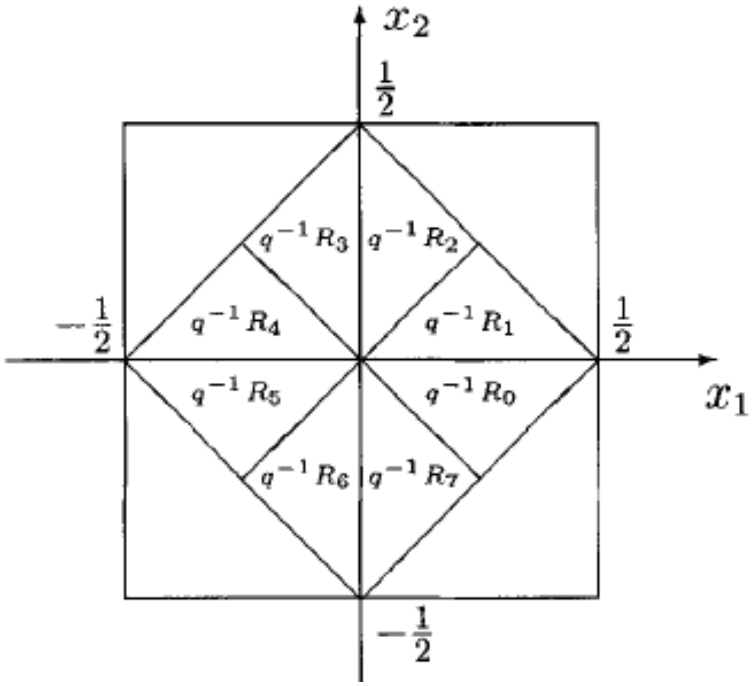

Figure 2.2 – Illustration de l'action de l'inverse de la matrice *quinconce* q sur les triangles R_i [36].

ou encore d'une manière équivalente

$$\varphi(x) = \varphi^0(x) = \varphi^1(qx) + \varphi^6\Big(qx - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\Big). \tag{2.8}$$

En appliquant D_{b_i} à l'équation précédente ou en observant la Figure 2.2, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\varphi^0(x) &= \varphi^1(qx) + \varphi^6\Big(qx - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\Big), & \varphi^1(x) &= \varphi^2(qx) + \varphi^5\Big(qx - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\Big),\\
\varphi^2(x) &= \varphi^3(qx) + \varphi^0\Big(qx + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\Big), & \varphi^3(x) &= \varphi^4(qx) + \varphi^7\Big(qx + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\Big),\\
\varphi^4(x) &= \varphi^5(qx) + \varphi^2\Big(qx + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\Big), & \varphi^5(x) &= \varphi^6(qx) + \varphi^1\Big(qx + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\Big),\\
\varphi^6(x) &= \varphi^7(qx) + \varphi^4\Big(qx - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\Big), & \varphi^7(x) &= \varphi^0(qx) + \varphi^3\Big(qx - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\Big).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Soit $\psi^0(x) = \psi(x) = \varphi^1(qx) - \varphi^6\Big(qx - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\Big)$. On fait donc une rencontre inattendue en essayant de trouver une ondelette de type Haar. En effet, les résultats ci-haut nous

montrent qu'il existe un ensemble $D \in \mathbb{R}^2$ telle que χ_D est une fonction d'échelle d'une AMR (définie d'une manière analogue que dans l'AMR en 1 dimension) produisant ainsi une ondelette de Type-Haar comme une différence de deux ensembles disjoints. Le système

$$\{D_q^j D_b T_k \psi(x) : J \in \mathbb{Z}, b \in B, k \in \mathbb{Z}^2\} \tag{2.10}$$

est donc une base orthonormée pour $L^2(\mathbb{R}^2)$. La fonction ψ est une différence de fonctions caractéristiques appropriées normalisées de triangles disjoints. Notre fonction échelle ϕ est, clairement, beaucoup plus simple que «twin dragon» qui est associé au système affine classique associé à la matrice quinconce $\{D_q^j T_k : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^2\}$ et cela est vrai pour les ondelettes correspondantes.
Les ensembles $\{D_b T_k, b \in B, k \in \mathbb{Z}^2\}$ et $\{T_k D_b, b \in B, k \in \mathbb{Z}^2\}$ sont identiques puisque les matrices $b \in B$ ont des entrées entières et $\det b = 1$.

On peut donc définir la fonction vectorielle :

$$\Psi = \begin{pmatrix} D_{b_0}\psi \\ D_{b_1}\psi \\ \vdots \\ D_{b_7}\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi^0 \\ \psi^1 \\ \vdots \\ \psi^7 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

où

$$\psi^0(x) = \varphi^1(qx) - \varphi^6\Big(qx - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\Big), \quad \psi^1(x) = \varphi^2(qx) - \varphi^5\Big(qx - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\Big),$$
$$\psi^2(x) = \varphi^3(qx) - \varphi^0\Big(qx + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\Big), \quad \psi^3(x) = \varphi^4(qx) - \varphi^7\Big(qx - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\Big),$$
$$\psi^4(x) = \varphi^5(qx) - \varphi^2\Big(qx + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\Big), \quad \psi^5(x) = \varphi^6(qx) - \varphi^1\Big(qx + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\Big),$$
$$\psi^6(x) = \varphi^7(qx) - \varphi^4\Big(qx - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\Big), \quad \psi^7(x) = \varphi^0(qx) - \varphi^3\Big(qx - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\Big).$$

On a donc que

$$\{D_q^j D_b T_k \psi : J \in \mathbb{Z}, b \in B, k \in \mathbb{Z}^2\} = \{D_q^j T_k \Psi : J \in \mathbb{Z}, b \in B, k \in \mathbb{Z}^2\}. \tag{2.12}$$

est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^2)$.

2.3.3 Exemple 2 et observations générales

Ici nous présentons les idées de base d'une autre construction similaire. Nous ne seront pas les développer de manière détaillée comme nous l'avons fait ci-dessus.
Soit donc $\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, représentant la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ dans le sens des aiguilles d'une montre, normalisé pour produire $\det \rho = 2$. Nous obtenons donc l'hexagone comme le montre la figure suivante et soit R_0 le triangle de sommets $(0,0); (\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ *et* $(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4})$. Dans cette exemple $B = \{\rho^i; i = 0, \ldots, 5\}$ et ses éléments transforment le triangle R_0 dans les triangles $R_i = \rho^i R_0, i = 0, 1, \ldots, 5$.

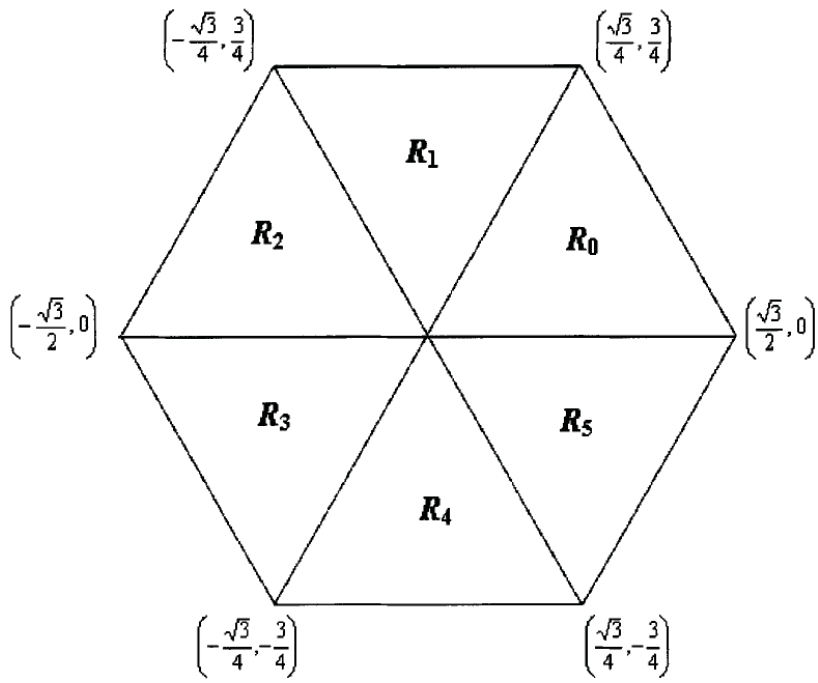

Figure 2.3 – Les ensembles échelles pour les 6 éléments du groupe engendrés par l'action des éléments de B sur le triangle R [36].

Soit $c = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 3\sqrt{3} \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ et soit $\Gamma = c\mathbb{Z}^2$. L'espace $V_0 \subset L^2(\mathbb{R}^2)$ dans cet exemple est un espace de toutes les fonctions constantes sur les Γ-translatées des triangles

$R_i = \rho^i R_0, i = 0, 1, \ldots, 5$. Les translatées de l'hexagone de la Figure 2.3 par $\gamma \in \Gamma$ forment une partition de $\mathbb{R}^2$. Soit $q = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$. L'AMR que nous considérons maintenant est générée par le système à dilatations composées $\{D_{q^j} D_{\rho^i} T_\gamma : j \in \mathbb{Z}; i = 0, 1 \ldots, 5; \gamma \in \Gamma\}$ appliqué à la fonction échelle $\phi = \alpha \chi_{R_0}$ où α choisi telle que $\|\phi\|_2 = 1$.
Les espaces V_j sont obtenus par dilatation de matrice q^j de l'espace V_0, en fait, $V_j = D_q^j V_0, j \in \mathbb{Z}$. Décrivons l'espace V_{-1} obtenu par $q^{-1} R_0$.

La figure suivante montre l'hexagone original H et à l'intérieur , l'hexagone $q^{-1}H$. On remarque que le triangle R_0 est une union disjoint des triangles $I_i = \rho^i I_0; i = 0, 1, \ldots, 5$. Clairement cela implique que $V_{-1} \subset V_0$. A partir de cette figure, nous observons que

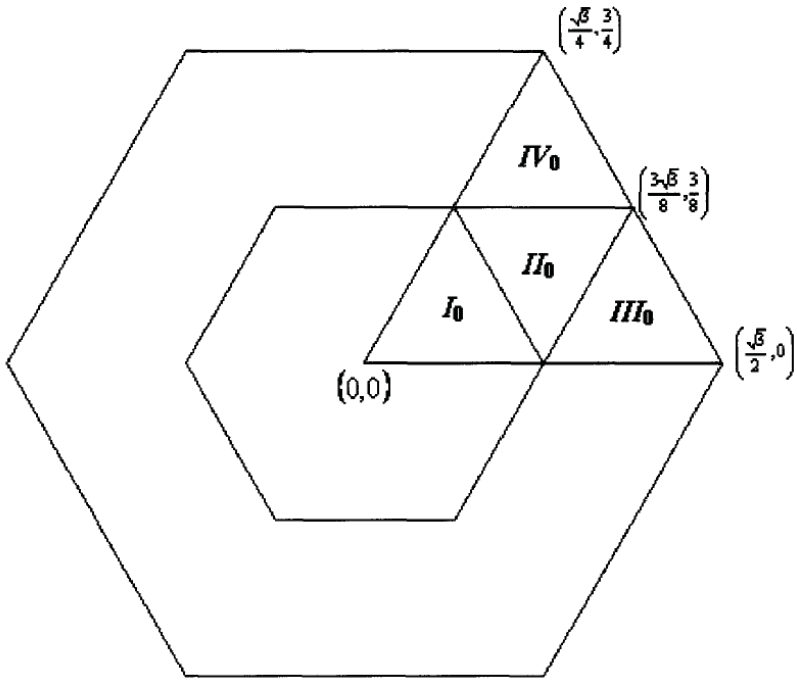

Figure 2.4 – Domaines de l'ondelette fondamentale pour les 6 éléments du groupe [36].

$$
\begin{aligned}
R_0 &= q^{-1}R_1 \cup \left[q^{-1}R_2 + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cup \left[q^{-1}R_3 + \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{8} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}\right] \cup \left[q^{-1}R_4 + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}\right] \\
&= q^{-1}R_1 \cup q^{-1}\left[R_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}\right] \cup q^{-1}\left[R_3 + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}\right] \cup q^{-1}\left[R_4 + \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}\right].
\end{aligned}
$$

Cette équation implique que

$$
\chi_{R_0}(x) = \chi_{q^{-1}R_1}(x) + \chi_{q^{-1}\left(R_2+\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}\right)}(x) + \chi_{q^{-1}\left(R_3+\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}\right)}(x) + \chi_{q^{-1}\left(R_4+\begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}\right)}(x)
$$

ou tout simplement

$$
\chi_{R_0}(x) = \chi_{I_0} + \chi_{II_0} + \chi_{III_0} + \chi_{IV_0}
$$

et le nombre des fonctions ondelettes génératrices dans W_{-1} est donné la formule $|\det q| - 1 = 3$. Nous avons donc trois fonctions qui engendrent le sous espace W_{-1} qui sont

$$
\begin{array}{c}
\chi_{I_0} - \chi_{II_0} + \chi_{III_0} - \chi_{IV_0} \\
\chi_{I_0} + \chi_{II_0} - \chi_{III_0} - \chi_{IV_0} \\
\chi_{I_0} - \chi_{II_0} - \chi_{III_0} + \chi_{IV_0}
\end{array}
\tag{2.13}
$$

les quelles nous notons par Ψ^1, Ψ^2 et Ψ^3 après normalisation dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. De ces observations , il s'en suit que W_{-1}, complement orthogonal de V_{-1} dans V_0, a une base orthonormée $\{D_{\rho^i}T_\gamma\Psi^l : j \in \mathbb{Z}; i = 0, 1, \ldots, 5; l = 1, 2, 3\}$. Comme nous pouvons le voir facilement, $c^{-1}Bc = B$, nous avons donc :

$$
\{D_{\rho^i}T_\gamma : i = 0, 1, \ldots, 5; \gamma \in \Gamma\} = \{T_\gamma D_{\rho^i} : i = 0, 1, \ldots, 5; \gamma \in \Gamma\},
$$

et par conséquent,

$$
\{D_{q^j}D_{\rho^i}T_\gamma\Psi^l : j \in \mathbb{Z}; i = 0, 1, \ldots, 5; l = 1, 2, 3; \gamma \in \Gamma\} = \{D_{q^j}T_\gamma D_{\rho^i}\Psi^l\},
$$

est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^2)$. Comme dans l'exemple précédent, nous pouvons affirmer que l'espace W_0 est générée par $3 \times 6 = 18$ fonctions $D_{\rho^i}\Psi^l, i = 0, 1, \ldots, 5; l = 1, 2, 3$, par l'application du système affine $\{D_{q^j}T_\gamma : j \in \mathbb{Z}, \gamma \in \Gamma\}$.

2.4 Approximation non-linéaire en plusieurs dimensions

Comme nous l'avons discuté au début de ce travail, l'une des propriétés les plus importantes des ondelettes en $L^2(\mathbb{R})$ est leur capacité de produire des approximations à convergence rapide pour les fonctions lisses par morceaux. Cette propriété implique que l'expansion en ondelettes est utile pour approximer efficacement la fonction f, puisque, comme le décrit l'erreur de l'approximation non-linéaire vue en (1.35), la plupart de la norme L^2 d'une fonction f peut être compresser à partir d'un nombre de coefficients de dilatation relativement petit et pas beaucoup d'informations est perdue en éliminant ceux qui restent. Cette idée est à la base de la construction de plusieurs algorithmes de compression des données par ondelettes, comme JPEG2000 [47].

Une autre implication importante, peut-être moins évidente, des propriétés de l'approximation en ondelettes est le problème classique de *débruitage* de données. Supposons que nous voulons pour récupérer une fonction f qui est corrompu par un bruit blanc Gaussien de moyenne nulle et de variance σ^2. Supposons que f_n désigne la fonction bruyant. Dans ce cas, *Donoho Johnstone* et [19] ont démontré qu'il existe une procédure très simple et très efficace pour estimer une fonction f. Il s'agit, essentiellement de :

1. le calcul de l'expansion en ondelettes de f_n,
2. Mettre à zéro les coefficients en ondelettes de f_n dont les valeurs absolues sont en dessous d'une valeur fixe (qui dépend σ^2),
3. le calcul d'un estimateur de f en tant que reconstruction à partir des coefficients d'ondelettes de f_n qui ont pas été mis à zéro.

Il s'avère que la performance de cette procédure dépend directement du taux de décroissance de l'erreur de l'approximation non-linéaire [19].

Les observations ci-dessus soulignent l'importance fondamentale des propriétés d'approximation en ondelettes unidimensionnelles par les applications. Malheureusement, comme on le verra plus en détail ci-dessous, la situation en est différente en plusieurs dimensions, où la généralisation multidimensionnelle standard des ondelettes dyadiques ne conduit aux mêmes type de propriétés d'approximation comme dans le cas unidimensionnel. Dans la suite, nous limitons notre attention à $n = 2$ (cas $n > 2$ sont similaires). Rappelons que, dans la dimension $n = 1$, pour atteindre une bonne approximation, nous avions besoin d'ondelettes ayant les supports compacts et ayant suffisamment de moments nuls. En dimension $n = 2$ nous pouvons facilement construire un système d'ondelettes orthonormées à partir d'une AMR unidimensionnelle avec fonction échelle ϕ et ondelette ψ, comme suit :
Définissons trois ondelettes $\psi^{(1)}(x,y) = \phi_1(x)\psi_1(y),\ \ \psi^{(2)}(x,y) = \psi_1(x)\phi_1(y),\ \ \psi^{(3)}(x,y) = \psi_1(x)\psi_1(y)$, Alors le système

$$\{\psi^{(l)}(x,y) = 2^j\psi^l(2^j(x-k_1), 2^j(x-k_2)) : j, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}, l = 1,2,3\}$$

est une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R}^2)$. Ce système est appelé AMR à base d'ondelettes séparable. Nous pouvons choisir clairement , ψ et ϕ à un support compact et avec R moment nuls. Dans ce cas, en procédant de la même manière que dans le cas unidimensionnel, si $f \in C^R(\mathbb{R}^2)$ et $\|f\|_{C^R}$, alors le $m^{\text{ième}}$ plus grand coefficient d'ondelette en valeur absolue satisfait à

Théorème 2.6 *Pour toute base d'ondelettes avec R moments duales non nuls, il existe des constante C_1, C_2 et L, pour $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ et pour toute fonction $f(x,y)$ avec dérivée appropriée dans L^2_{loc} :*

$$|\langle f(x,y), \psi(2^jx-k_1)\phi(2^jy-k_1)\rangle|_{L^2} \leqslant C_1\|f\|_{\mathbb{C}^R}m^{-(R+\frac{1}{2})}, \tag{2.14}$$

$$|\langle f(x,y), \phi(2^jx-k_1)\psi(2^jy-k_1)\rangle|_{L^2} \leqslant C_1\|f\|_{\mathbb{C}^R}m^{-(R+\frac{1}{2})}, \tag{2.15}$$

$$|\langle f(x,y), \psi(2^j x - k_1)\psi(2^j y - k_1)\rangle|_{L^2} \leqslant C_2 \|f\|_{\mathbb{C}^R} m^{-2(R+\frac{1}{2})}. \tag{2.16}$$

où $C_1 = \|\Psi_R\|_{L^2}$ *et* $C_2 = \|\Psi_R\|^2_{L^2}$.

Démonstration. Nous utilisons le résultat obtenu dans le premier chapitre où nous assommons que ψ est à support compact. C'est à dire qu' il existe $L > 0$ tel que $|x| \geqslant L \Rightarrow \psi(x) = 0$ et définissons donc $\Psi(x)$ pour $r \in \mathbb{N}$ comme suit :

$$\Psi_R(x) = \int_L^x t^{r-1}\psi(t)dt.$$

En outre, comme ψ a R moments nuls le support de $\Psi(x)$ est dans $[-L, L]$ $\forall\, r \leqslant R$. On a donc que pour toute fonction $f(x) \in C^R$, on a :

$$\langle f(x), \psi(2^j x - k)\rangle = \frac{1}{(R-1)!}\frac{1}{2^{jR}}\int_{\frac{k-L}{2^j}}^{\frac{k+L}{2^j}} f^{(R)}(x)\Psi_R(x)dx.$$

et donc que

$$|\langle f(x), \psi(2^j x - k)\rangle| \leqslant \frac{\|\Psi_R\|_{L_{1/(1-\frac{1}{P})}}}{2^{j(R+1-\frac{1}{P})}}\Big[\int_{\frac{k-L}{2^j}}^{\frac{k+L}{2^j}} |f^{(R)}(x)|^p dx\Big]^{\frac{1}{P}}. \tag{2.17}$$

Corollaire 2.7 *Pour toute base d'ondelettes avec R moments nuls et pour tout $p \geqslant 1$ $k \in \mathbb{Z}$ et pour toute fonction $f(x,y)$ et à dérivée dans L^p_{loc}, en utilisant l'inégalité de Hölder on obtient les inégalités* (2.14)*et* (2.15)

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
|\langle f(x,y), \phi(2^j x - k_1)\psi(2^j y - k_2)\rangle| &\leqslant \frac{\|\Psi_R\|_{L^{1/(1-\frac{1}{p})}}}{2^{j(R+1-\frac{1}{p})}}\Big[\int_{\frac{k_1-L}{2^j}}^{\frac{k_1+L}{2^j}}\int_{\frac{k_2-L}{2^j}}^{\frac{k_2+L}{2^j}} |\frac{d^R}{dx^R}f(x,y)|^p dydx\Big]^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \frac{C_1}{m^{-(R+1-\frac{1}{p})}}\Big[\int_{\frac{k_1-L}{2^j}}^{\frac{k_1+L}{2^j}}\int_{\frac{k_2-L}{2^j}}^{\frac{k_2+L}{2^j}} |\frac{d^R}{dx^R}f(x,y)|^p dydx\Big]^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

en prenant $p = 2$ et $m = 2^j$ on obtient

$$|\langle f(x,y), \phi(2^j x - k_1)\psi(2^j y - k_2)\rangle| \leqslant \|f\|_{C^R} C_1 m^{-(R+\frac{1}{2})}.$$

De la même manière on on a que :

$$|\langle f(x,y),\psi(2^jx-k_1)\phi(2^jy-k_2)\rangle| \leqslant \frac{C_1}{m^{-(R+1-\frac{1}{p})}}\Big[\int_{\frac{k_1-L}{2^j}}^{\frac{k_1+L}{2^j}}\int_{\frac{k_2-L}{2^j}}^{\frac{k_2+L}{2^j}}|\frac{d^R}{dy^R}f(x,y)|^p dydx\Big]^{\frac{1}{p}}$$

en prenant $p=2$ et $m=2^j$ on obtient

$$|\langle f(x,y),\psi(2^jx-k_1)\phi(2^jy-k_2)\rangle| \leqslant C_1\|f\|_{C^R}m^{-(R+\frac{1}{2})}$$

■

Pour montrer l'inégalité (2.16), montrons le théorème suivant :

Théorème 2.8 *Pour toute base d'ondelettes avec R moments nuls et pour tout $p \geqslant 1$ $k \in \mathbb{Z}$ et pour toute fonction $\frac{d^{2R}}{dx^R dy^R}f(x,y)$ dans L^p_{loc} :*

$$|\langle f(x,y),\psi(2^jx-k_1)\psi(2^jy-k_2)\rangle|_{L^2} \leqslant \frac{C_2}{2^{2j(R+1-\frac{1}{p})}}\Big[\int_{\frac{k_1-L}{2^j}}^{\frac{k_1+L}{2^j}}\int_{\frac{k_2-L}{2^j}}^{\frac{k_2+L}{2^j}}|\frac{d^{2R}}{dx^R dx^R}f(x,y)|^p dydx\Big]^{\frac{1}{p}}$$

où $C_2 = \|\Psi_R\|^2_{L_{1/(1-\frac{1}{P})}}$.

Démonstration. Considérons

$$\begin{aligned} g(y) &= \int f(x,y)\psi(2^jx-k)dx \\ &= \frac{1}{2^{jR}}\int_{\frac{k_1-L}{2^j}}^{\frac{k_1+L}{2^j}}\frac{d^R}{dx^R}f(x,y)\Psi_R(2^jx-k)dx \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \langle f(x,y),\psi(2^jx-k_1)\psi(2^jy-k_2)\rangle &= \langle g(y),\psi(2^jy-k_2)\rangle \\ &= \frac{1}{2^{2Rj}}\int_{\frac{k_2-L}{2^j}}^{\frac{k_2+L}{2^j}}\Psi_R(2^jy-k_2)\frac{d^R}{dy^R} \\ &\times \int_{\frac{k_1-L}{2^j}}^{\frac{k_1+L}{2^j}}\frac{d^R}{dy^R}f(x,y)\Psi_R(2^jx-k_1)dxdy. \end{aligned}$$

Comme $\frac{d^{2R}}{dx^R dy^R} f(x,y)$ et Ψ_R sont absolument intégrables, nous pouvons différentier sous le signe intégrale :

$$\begin{aligned}\langle f(x,y), \psi(2^j x - k_1)\psi(2^j y - k_2)\rangle &= \frac{1}{2^{2Rj}} \int_{\frac{k_1-L}{2^j}}^{\frac{k_1+L}{2^j}} \int_{\frac{k_2-L}{2^j}}^{\frac{k_2+L}{2^j}} \Psi_R(2^j x - k_1)\tilde{\Psi}_R(2^j y - k_2) \\ &\times \frac{d^{2R}}{dx^R dy^R} f(x,y) dy dx.\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$|\langle f(x,y), \psi(2^j x - k_1)\psi(2^j y - k_2)\rangle| \leqslant \frac{\|\Psi_R\|^2_{L^{1/(1-\frac{1}{p})}}}{2^{2j(R+1-\frac{1}{p})}} \Big[\int_{\frac{k_1-L}{2^j}}^{\frac{k_1+L}{2^j}} \int_{\frac{k_2-L}{2^j}}^{\frac{k_2+L}{2^j}} |\frac{d^{2R}}{dx^R dy^R} f(x,y)|^p dy dx \Big]^{\frac{1}{p}} \tag{2.18}$$

en prenant $p = 2$ on a

$$|\langle f(x,y), \psi(2^j x - k_1)\psi(2^j y - k_2)\rangle| \leqslant C_2 \|f\|_{\mathbb{C}^R} m^{-2(R+\frac{1}{2})}.$$

pour $m = 2^j$ et $C_2 = \|\Psi_R\|^2_{L^2}$. ■

Théorème 2.9 *Pour toute base d'ondelettes avec R moment non nuls et pour tout $p, q \geqslant 0$, toute fonction $f(x,y)$ à support compact dans $[0,1]^2$ et à dérivée mixte $\frac{d^{2R}}{dx^R dy^R} f(x,y) \in L^p_{loc}$ pour $N > 0$ peut être approximée par la fonction f_N telle que :*

$$\|f - f_N\|_{L^p} \leqslant C_4 N^{-R} \|\frac{d^{2R}}{dx^R dy^R} f(x,y)\|$$

où f_N n'a pas plus que N coefficients non nuls dans l'expansion sur la base d'ondelettes, et

$$C_4 = C_2 2^{\frac{2}{P}-R} L^{\frac{1}{P}} \|\phi\|_{L_P} \times \Big(1 + \frac{2}{(R - \frac{1}{P}) log 2}\Big)^{2+\frac{2}{p}}.$$

Démonstration. Posons

$$\begin{aligned}
\phi_k &= \phi(x-k_1)\phi(x-k_2) \qquad (k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2, && (2.19)\\
\psi_{j,k} &= \psi(2^{j_1}x-k_1)\psi(2^{j_1}y-k_2), \qquad (j_1,j_2)\in\mathbb{Z}_+^2,\ \ (k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2 && (2.20)\\
\alpha_i &= \langle f,\phi_k\rangle, && (2.21)\\
\beta_{j,k} &= \langle f,\psi_{j,k}\rangle, && (2.22)\\
\|j\| &= j_1+j_2, && (2.23)\\
\mathcal{D} &= \|\frac{d^{2R}}{dx^R dy^R}f(x,y)\|_{L_p}, && (2.24)\\
C_3 &= (2L)^{\frac{1}{p}}C_2. && (2.25)
\end{aligned}$$

De [50], il découle que l'erreur de l'approximation non-linéaire est alors donnée par :

$$\begin{aligned}
\|f-f_N\|_{L_q} &\leqslant \sum_{j=j_0+1}^{\infty} j2^j\epsilon_j\\
&= C_3(2\gamma)^{\frac{1}{P}}\|\phi\|_{L_p}\mathcal{D}\sum_{j=j_0+1}^{\infty}\frac{j}{2^{j+\frac{R+\frac{1}{p}}{2}j_0+\frac{R+\frac{1}{p}}{2}j}}\\
&\leqslant C_3(2\gamma)^{\frac{1}{P}}\gamma\|\phi\|_{L_p}2^{-R}N^{-R}\|\frac{d^{2R}}{dx^R dy^R}f(x,y)\|_{L_q}.
\end{aligned}$$

où $\gamma=\frac{2}{(R-\frac{1}{p})\log 2}\Big(1+\frac{2}{(j_0+1)(R-\frac{1}{p})\log 2}\Big)$ et $\epsilon_j=C_3\mathcal{D}(2\gamma)^{\frac{1}{p}}/2^{j+\frac{R+\frac{1}{p}}{2}j_0+\frac{R+\frac{1}{p}}{2}j}$ [50].
En tenant compte que $\gamma\leqslant\Big(1+\frac{2}{(R-\frac{1}{p})\log 2}\Big)^2$ on a

$$\begin{aligned}
\|f-f_N\|_{L_q} &\leqslant C_2\gamma^{1+\frac{1}{P}}\|\phi\|_{L_p}2^{\frac{2}{P}-R}N^{-R}\|\frac{d^{2R}}{dx^R dy^R}f(x,y)\|_{L_q}\\
&= C_2\Big(1+\frac{2}{(R-\frac{1}{p})\log 2}\Big)^{2+\frac{2}{P}}\|\phi\|_{L_p}2^{\frac{2}{P}-R}N^{-R}\|\frac{d^{2R}}{dx^R dy^R}f(x,y)\|_{L_q}.
\end{aligned}$$

En fin on obtient

$$\|f-f_N\|_{L_q}\leqslant C_4N^{-R}\|\frac{d^{2R}}{dx^R dy^R}f(x,y)\|_{L_q}$$

donc

$$\|f-f_N\|_2^2\leqslant CN^{-2R}\|f(x,y)\|_2^2.$$

■

Cependant, alors que dans le cas unidimensionnel les propriétés d'approximation en ondelettes ne sont pas affectées si la fonction f possède un nombre fini de singularités isolées, la situation est maintenant très différente. Examinons, par exemple, l'approximation en ondelettes de la fonction $f = \chi_D$, où $D \in \mathbb{R}^2$ est un ensemble compact limité par un contour fini de longueur L. Considérons en particulier les coefficients d'ondelettes associés à la frontière de la région D. Comme f est bornée, ces coefficients d'ondelettes sont d'ordre $|\langle f, \Psi^{(l)}_{j,k_1,k_2}\rangle| \backsim 2^{-j}$. En outre, comme la frontière de D est de longueur finie et que les ondelettes ont des supports compacts, à chaque échelle j il y a à peu près $L2^j$ ondelettes à support recouvrant la frontière de la région D. Il résulte de ces observations que le $N^{\text{ième}}$ plus grand coefficient d'ondelettes dans cette classe est borné par $C(L)N^{-1}$. Ceci implique que le taux d'erreur d'approximation non-linéaire est seulement d'ordre $\mathcal{O}(N^{-1})$. Par conséquent, il existe un grand nombre de coefficients d'ondelettes significatifs associés au degré de discontinuité de la fonction f, ce qui réduit le taux d'approximation en ondelettes. La raison de cette limitation de l'AMR de bases d'ondelettes séparables en deux dimensions est le fait que leur supports sont isotropes (elles ont supports sur un carré de la taille $\backsim 2^{-j} \times 2^{-j}$) de sorte qu'il y a beaucoup ondelettes chevauchant les points de singularité produisant ainsi des coefficients de dilatation importants.

Pour résoudre ce problème et produire de meilleures approximations des fonctions lisses par morceaux en plusieurs dimensions, on doit considérer les systèmes de multi-échelles alternatives qui sont plus souples aux représentants aux caractéristiques anisotropes. Plusieurs constructions ont été introduites, à commencer par les *wedgelets* [18] et *ridgelets* [6]. Parmi les constructions les plus réussies proposées dans la littérature, les *curvelets* [7] et Shearlets (Ondelettes de Cisaillement) [24] atteignent cette

flexibilité supplémentaire en définissant un ensemble de fonctions analysantes allant non seulement sur différentes échelles comme ondelettes traditionnelles, mais aussi sur diverses directions et avec des supports hautement anisotropes. Comme résultat, ces systèmes sont capables de produire des approximations (non-linéaire) des fonctions $\mathbb{C}^2$ continues par morceaux en deux dimensions pour lesquelles la décroissance de l'erreur d'approximation non-linéaire est d'ordre N^{-2}, ce qui est, comme si les fonctions n'avaient pas de discontinuités.

Pour donner une meilleure idée de cette approche et montrer comment le mécanisme d'ondelettes peut être modifié pour obtenir ces types de systèmes, nous allons brièvement décrire la construction des Ondelettes de Cisaillement (OC) en deux dimension, celles-ci sont étroitement liées aux ondelettes avec dilatations composées. Ici, nous allons esquisser seulement les idées principales et les idées générales sont référencées dans [24] et [26].

2.4.1 Système d'ondelettes de cisaillement (OC)

La théorie des ondelettes à dilatations composées introduite précédemment fournit une approche particulièrement efficace pour combiner la géométrie et de l'AMR. En dimension n = 2, nous considérons le système affine avec dilatations composées

$$\{D_a^j D_b^l T_k \psi(x) = \psi_{j,l,k}(x) = |det(M_{cl})|^{-\frac{j}{2}} \psi(M_{cl}^j x - k) : j, l \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^2\} \tag{2.26}$$

où les matrices $a = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_{cl} = a.b = \begin{pmatrix} c & cl \\ 0 & c^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$. Les éléments de ce système forment un cadre de Parseval de $L^2(\mathbb{R}^2)$. C'est à dire :

$$\sum_{j,l,k} |\langle f, \psi_{j,l,k}(x) \rangle|^2 = \|f\|^2,$$

pour tout $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

Dans cette approche, a est une matrice de dilatation et ses puissances entières produisent des dilatation anisotropes, plus précisément des *dilatations anisotropes paraboliques*, étant donné que les facteurs de dilatation croissent d'une manière quadratique dans une coordonnée par rapport à l'autre. La matrice de cisaillement b est associée à des transformations géométriques, comme nous allons le voir, ses puissances entières contrôlent les orientations des éléments du système. Cela permet de construire des cadres de Parseval dont les éléments vont non seulement à différentes échelles mais aussi à des diverses orientations. Ici, nous prenons un exemple particulier d'ondelettes à dilatations composées dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, appelées *Ondelettes de Cisaillement*. Celles-ci sont des collections des fonctions de la forme (2.10) où $a = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice de dilatation anisotrope et $b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ une matrice de cisaillement.
Pour tout $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \widehat{\mathbb{R}}^2$, $\xi_1 \neq 0$, soit $\widehat{\psi}(\xi)$ donnée par

$$\widehat{\psi}(\xi) = \widehat{\psi}_1(\xi_1)\widehat{\psi}_2(\frac{\xi_1}{\xi_2}),$$

où $\widehat{\psi}_1, \widehat{\psi}_2 \in C^\infty(\widehat{\mathbb{R}})$, $supp\widehat{\psi}_1 \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \setminus [-\frac{1}{16}, \frac{1}{16}]$ et $supp\widehat{\psi}_2 \subset [-1, 1]$. Cela implique que $\widehat{\psi}(\xi)$ est C^∞ et est à support compact telle que $supp\widehat{\psi} \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$. De plus nous prétendons que

$$\sum_{j \geqslant 0} |\psi_1(2^{-2j}\xi)|^2 = 1 \quad pour \quad |\xi| \geqslant \frac{1}{8}, \tag{2.27}$$

et que pour chaque $j \geqslant 0$

$$\sum_{l=2^{-j}}^{2^j-1} |\psi_2(2^j\xi - l)|^2 = 1 \quad pour \quad |\xi| \leqslant 1.,$$

Comme $a^j b^l = \begin{pmatrix} 2^{2j} & 2^{2j}l \\ 0 & 2^j \end{pmatrix}$, nous avons dans le domaine de Fourier (fréquentiel)

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi}_{j,l,k}(\xi) &= 2^{-\frac{3j}{2}}\widehat{\psi}(\xi a^{-j}b^{-j} - k) \\
&= 2^{-\frac{3j}{2}}e^{-2i\pi a^{-j}b^{-j}k\xi}\widehat{\psi}(\xi a^{-j}b^{-j}) \\
&= 2^{-\frac{3j}{2}}e^{-2i\pi a^{-j}b^{-l}k\xi}\widehat{\psi}(2^{-2j}\xi_1, 2^{-j}\xi_2 - 2^{-2j}\xi_1 l) \\
&= 2^{-\frac{3j}{2}}e^{-2i\pi a^{-j}b^{-l}k\xi}\widehat{\psi}_1(2^{-2j}\xi_1)\widehat{\psi}_2(\frac{2^{-j}\xi_2 - 2^{-2j}\xi_1 l}{2^{-2j}\xi_1}) \\
&= 2^{-\frac{3j}{2}}e^{-2i\pi a^{-j}b^{-l}k\xi}\widehat{\psi}_1(2^{-2j}\xi_1)\widehat{\psi}_2(2^j\frac{\xi_2}{\xi_1} - l).
\end{aligned}$$

De cette dernière expression, on a que

$$\widehat{\psi}_{j,l,k}(\xi) \subset \{(\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2 : \xi_1 \in [-2^{2j-1}, 2^{2j-1}] \setminus [-2^{2j-4}, 2^{2j-4}], \quad |\frac{\xi_2}{\xi_1} - l2^{-j}| \leqslant 2^{-j}\}.$$

Donc les éléments $\widehat{\psi}_{j,l,k}$ ont des supports trapézoïdales, de dimensions approximatives $2^{2j} \times 2^j$, orientés le long des lignes de pente $l2^{-j}$.

La dernière expression montre que les supports de la fréquence des éléments du système OC sont de plus en plus allongés à des échelles fines (quand $j \longrightarrow \infty$) et orientables, avec une orientation contrôlée par l'indice l. Ces propriétés montrent que les OC sont beaucoup plus souples que les ondelettes *"isotropes"* et expliquent pourquoi elles peuvent obtenir de meilleures propriétés d'approximation pour les fonctions lisses continues par morceaux. On trouve des propriétés similaires pour les *Curvelets* et peuvent être étendues à des dimensions supérieures. Comme indiqué ci-dessus, OC et *Curvelets* sont parmi les moyens mis en place au cours de la dernière décennie pour étendre ou généraliser les ondelettes.

Nous rappelons également la construction en *Bandelettes* [42] ; ces systèmes amélioraient les approximations pour les fonctions $f \in C^\alpha$, $(\alpha > 2)$ continues par morceaux en utilisant une construction adaptative. La référence [41] donne une description de ces systèmes en plusieurs dimensions.

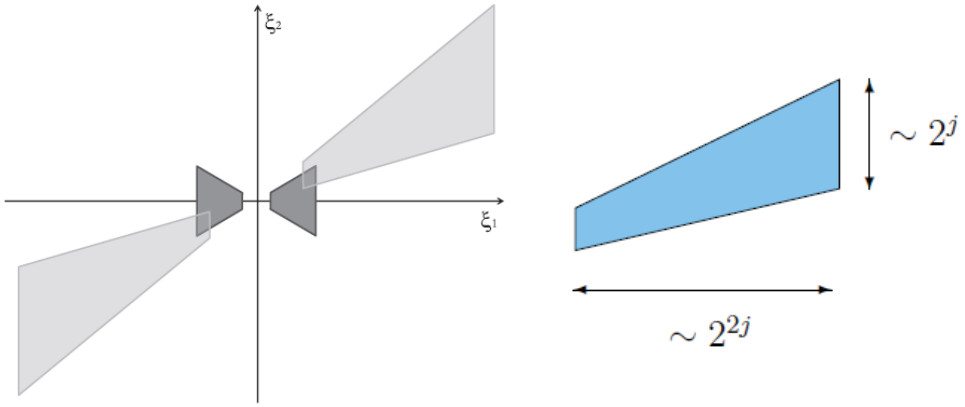

Figure 2.5 – Les supports de fréquence des éléments du système d'OC sont les paires de régions trapézoïdales définies à différentes échelles et orientations, dépendant de j et l, respectivement. La figure montre les supports de fréquence de deux éléments représentatifs : la région plus sombre correspond à $j = 0,\ l = 0$ et la région claire à $j = 1,\ l = 1$ [17]

2.4.2 Exemple de construction de ψ_1 et ψ_2

Ici, nous nous referons à [24] pour montrer un exemple de construction des fonctions ψ_1 et ψ_2 satisfaisant au propriétés ci-haut citées.

Pour construire ψ_1, soit une fonction impaire $h(t) \in C^\infty$ à support dans $\big(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\big)$, satisfaisant à $\int\limits_{\mathbb{R}} h(t)dt = \frac{\pi}{2}$ et définissons $\theta(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\xi} h(t)dt$. Alors on peut construire une fonction lisse

$$b(\xi) = \begin{cases} \sin\big(\theta(|\xi|) - \frac{1}{2}\big) & si \ \ \frac{1}{3} \leqslant |\xi| \leqslant \frac{2}{3}, \\ \sin\big(\frac{\pi}{2} - \theta(\frac{|\xi|}{2} - \frac{1}{2})\big) & si \ \ \frac{2}{3} \leqslant |\xi| \leqslant \frac{4}{3}, \\ 0 & ailleurs. \end{cases}$$

il découle des hypothèses que nous avons faites ([31], Sec.1.4) que

$$\sum_{j=-1}^{\infty} b^2(2^{-j}\xi) = 1 \quad pour \quad |\xi| \geqslant \frac{1}{3}.$$

Posons maintenant $u^2(\xi) = b^2(2\xi) + b^2(\xi)$. Il s'en suit que

$$\sum_{j\geqslant 0}^{\infty} u^2(2^{-2j}\xi) = \sum_{j=-1}^{\infty} b^2(2^{-j}\xi) = 1 \quad pour \quad |\xi| \geqslant \frac{1}{3}.$$

Finalement, soit ψ_1 définie par $\widehat{\psi}_1(\xi) = u(\frac{8}{3}\xi)$. Alors $supp\widehat{\psi}_1 \in \big[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{16}\big] \cup \big[\frac{1}{16}, \frac{1}{2}\big]$ et l'équation (2.27) est satisfaite. Cette construction est illustrée par la Figure 2.6 (a).

Pour la construction de $\widehat{\psi}_2(\xi)$, nous considérons d'abord une fonction à bosse lisse $f_1 \in C^\infty(-2,2)$ telle que $0 \leqslant f_1 \leqslant 1$ sur $(-2,2)$ et $f_1 = 1$ sur $[-1,1]$ (voir [33] , Sec. 1.4). Ensuite, posons $f_2 = \sqrt{1-e^{\frac{1}{t}}}$. Alors (dans le sens de la limite à gauche) $f_2(0) = 1$, $f_2^{(k)}(0)$ pour $k \geqslant 1$ et $0 < f_2 < 1$ sur $(-1,0)$. Définissons donc $f(t) = f_1(t-1)f_2(t-1)$, pour $t \in [-1,1]$. Il est facile de voir que $f^{(k)}(-1) = 0$ pour $k \geqslant 0$, $f(1) = 1$, et $f^{(k)}(1) = 0$ pour $k \geqslant 1$.
Soit $g(t) = \sqrt{1-f^2(t-2)}$. Puisque $g(t) = e^{\frac{1}{2(t-3)}}$, pour $(2,3)$, il s'en suit que $\lim\limits_{t\to 3^-} g^{(k)}(t) = 0$, pour $k \geqslant 0$. Finalement, définissons

$$\widehat{\psi}_2(\xi) = \begin{cases} f(\xi) & si \quad \xi \in [-1,1), \\ g(\xi) & si \quad \xi \in [1,3], \\ 0 & ailleurs. \end{cases}$$

Alors $\widehat{\psi}_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, avec $supp\widehat{\psi}_2 \in [-1,3]$, et

$$\widehat{\psi}_2^2(\xi) + \widehat{\psi}_2^2(\xi+1) = 1, \quad \xi \in [-1,1]. \tag{2.28}$$

De l'équation (2.28), il s'en suit que, pour tout $j \geqslant 1$,

$$\sum_{l=-2^j}^{2^j-1} |\widehat{\psi}_2(2^j\xi - l)|^2, \quad pour |\xi| \leqslant 1.$$

La fonction $\widehat{\psi}_2$ est illustrée dans la Figure 2.6 (b).

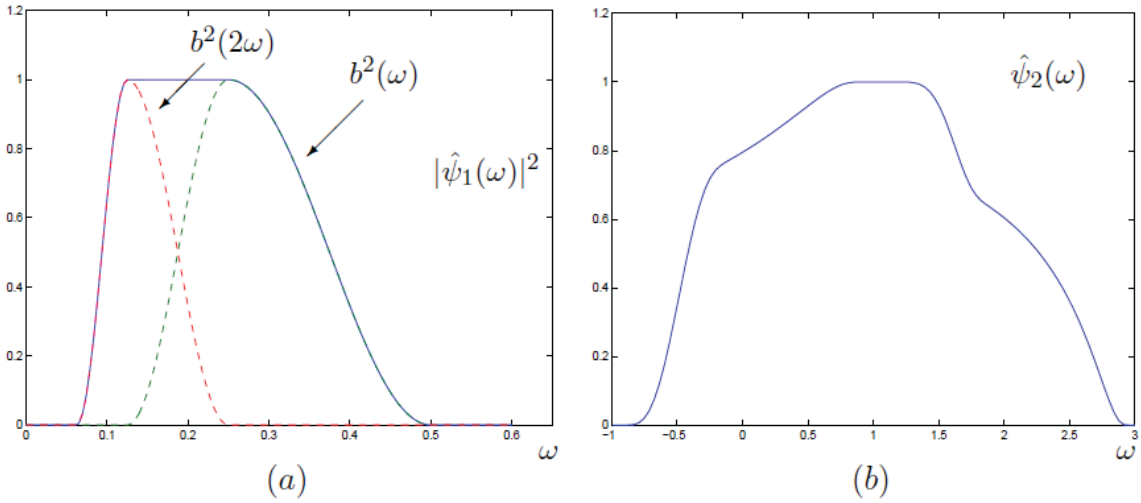

Figure 2.6 – (a) La fonction $|\widehat{\psi}_1(\xi)|^2$ (trait plein), pour $\xi > 0$; le côté négatif est symétrique. Cette fonction est obtenue, après mise à l'échelle, à partir de la somme de la fonctions fenêtre $b^2(\xi) + b^2(2\xi)$ (lignes pointillées). (b) La fonction $\widehat{\psi}_2(\xi)$ [24].

CHAPITRE 3

Les Ondelettes continues

3.1 Notation et définition

Dans cette partie, nous adoptons la convention que $x \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur colonne, c'est à dire $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et que $\xi \in \widehat{\mathbb{R}}^n$ est un vecteur ligne, c'est à dire $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 & \cdots & \xi_n \end{pmatrix}$.
Nous considérons aussi les deux opérateurs sur $L^2(\mathbb{R}^n)$:

• Les Translations T_y : $(T_y f)(x) = f(x-y)$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$,

• Les Dilatations D_a : $(D_a f)(x) = |\det a|^{-\frac{1}{2}} f(a^{-1}x)$, $\forall a \in GL(n, \mathbb{R})$

Rappelons qu'une suite dénombrable $\{\psi_i\}_{i \in I}$ dans un espace de Hilbert $\mathbb{H}$ est un cadre de Parseval pour $\mathbb{H}$ si et seulement si

$$\sum_{i \in I} |f, \psi_i|^2 = \|f\|^2 \quad \forall f \in \mathbb{H}$$

Ceci est équivalent à la formule

$$f = \sum_{i \in I} \langle f, \psi_i \rangle \psi_i \quad \forall f \in \mathbb{H}$$

où les séries convergent en norme dans $\mathbb{H}$. Cela montre qu'un cadre de Parseval est une représentation de type base même si un cadre de Parseval n'a pas besoin d'être une base en général.

3.1.1 Groupe général affine

Le groupe général affine sur R^n que nous notons ici $G = GL(n, R) \ltimes R^n$ consiste en tout les pairs $(a, t) \in G$ (muni du produit topologique) avec opération de groupe

$$(a, t).(a^{'}, t^{'}) = (aa^{'}, (a^{'})^{-1}t + t^{'}); \forall (a, t) \in G.$$

Sur R^n, cette opération est associée à l'action

$$x \longrightarrow a(x + t).$$

Soit

$$N = \{(a, t) \in G \mid a = I, t \in R^n\}$$

et soit $D = \{(a, t) : a \in D, t = 0\}$ un sous groupe fermé de $GL(n, R)$. Nous considérons le sous groupe H donné par

$$H = \{(a, t) : a \in D, t \in N\}.$$

Dans la suit, nous nous référons à N comme groupe de translations et à D comme groupe de dilatation de H.

3.1.2 Mesure de Haar

Tout groupe localement compact H peut être muni de mesure qui jouent le même rôle que celui joué par la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ [49]. Plus précisément, on montre

que (voir [29] par exemple) qu'il existe deux deux mesures μ_G et μ_D sur H, appelées mesures de Haar à gauche et à droite respectivement, telles que :

$$d\mu_G(g^{'}.g) = d\mu_G(g), \forall g^{'} \in H,$$
$$d\mu_D(g.g^{'}) = d\mu_D(g), \forall g^{'} \in H,$$

et sont uniques avec cette propriété (à facteur multiplicatif près). μ_G et μ_D sont en général différentes. Si $\mu_G = \mu_D$, on dit que H est un groupe unimodulaire. En particulier si H est compact, il est automatiquement unimodulaire et

$$\int_H d\mu_G(g) < \infty.$$

Dans notre cas (groupe affine à n dimensions),

$$d\mu_G(a,t) = d\mu_G(a)d\mu_G(t) = \frac{d^n a}{a^n}\frac{dt}{t}$$
$$d\mu_D(a,t) = d\mu_D(a)d\mu_D(t) = da\frac{dt}{t}.$$

Soit donc une représentation unitaire τ de H sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ définit par

$$\begin{aligned}(\tau_{(a,t)}\psi)(x) &= |\det a|^{-\frac{1}{2}}\psi((a,t)^{-1}x) \\ &= |\det a|^{-\frac{1}{2}}\psi(a^{-1}x - t) := \psi_{a,t}(x),\end{aligned}$$

pour $(a,t) \in H$. Les éléments de $\{\psi_{a,t}(x) : (a,t) \in H\}$ sont des systèmes affines d'ondelettes continues par rapport à H.

3.2 Ondelettes continues

Dans cette section, nous abordons les ondelettes continues en une dimension en introduisant les groupes associés à elles. Soit G un *groupe affine* associé à $\mathbb{R}$. C'est à dire

que G est un ensemble d'éléments $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, a \neq 0$, avec l'opération

$$(c,d).(a,b) = (ca, b + \frac{d}{a})$$

Pour $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ posons

$$(\tau_s \psi)(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi(s^{-1}(x)) \equiv \psi_{a,b}(x).$$

3.2.1 Transformée en ondelette continue en 1 dimension

Pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, la *transformée en ondelette continue* associée à $\psi_{a,b}$ et G est définie par

$$\begin{aligned}(W_\psi f(x))(s) &= \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{(\tau_s \psi)(x)} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\psi(\frac{x-b}{a})} dx = \sqrt{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{\psi}(a\xi)} e^{2i\pi\xi b} d\xi.\end{aligned}$$

Vu du coté spatial x, $(W_\psi f(x))(s)$ renseigne sur la fonction f autour du point b dans un voisinage de taille $\backsim a$ et du coté fréquentiel ξ, $(W_\psi f(x))(s)$ renseigne sur la fonction $\widehat{f}$ autour de la fréquence $\backsim \frac{1}{a}$. Ici le terme *continu* se réfère à la continuité des translations par $b \in \mathbb{R}$ plutôt que les dilatations a. On peut voir donc la transformée en ondelettes continues comme un produit de convolution, pour a fixé

$$\begin{aligned}(W_\psi f(x))(s) &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\psi(\frac{x-b}{a})} dx \\ &= (f * \tilde{\psi}_a)(b)\end{aligned} \tag{3.1}$$

où $\tilde{\psi}_a = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi(-\frac{x}{a})$.

3.2.2 Condition d'admissibilité

Dans cette théorie, l'objectif est de trouver une condition sur la fonction ψ telle que

$$\|f\|_2^2 = \int_G |(W_\psi f(x))(s)|^2 d\mu_G(s) = \int_G |\langle f, \psi_{a,b}\rangle|^2 d\mu_G(a,b) \tag{3.2}$$

pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Ici, μ_G est une mesure à gauche de Haar sur G. De l'équation (3.2) on obtient l'égalité

$$\langle f, g\rangle = \int_G \langle f, \psi_{a,b}\rangle\langle \psi_{a,b}, g\rangle d\mu_G(a,b)$$

pour toute fonction $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Cela nous donne la formule de décomposition

$$f(x) = \int_G \langle f, \psi_{a,b}\rangle \psi_{a,b} d\mu_G(s) = \int_G (W_\psi f)(\tau_{a,b}\psi)(x) d\mu_G(a,b). \tag{3.3}$$

En se référent à la condition de Caldéron (voir [5]) on obtient que ψ doit satisfaire la *condition d'admissibilité* (la démonstration sera donnée dans la suite)

$$\int_0^\infty |\psi(\xi a)|^2 \frac{da}{a} = 1 \quad p.p.\ \xi \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

La fonction ψ est appelée une *ondelette continue*, si elle satisfait à l'équation (3.4) et $(W_\psi f(x))(s) = \langle f, \psi_{a,b}\rangle$ est la transformée en ondelette continue de la fonction f.

3.3 Transformée de Fourier, transformée en ondelettes continues en plusieurs dimensions

Nous utilisons la formule de transformée de Fourier en plusieurs dimensions

$$\widehat{f(ax)}(\xi) = \frac{1}{|deta|}\widehat{f}(a^{-T}\xi)$$

et en posant $g(x) = \psi(a^{-1}x)$ dans la suite, la transformée de Fourier correspondant à $\tau_{(a,t)}\psi$ est

$$\begin{aligned}
(\tau_{(a,t)}\psi)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} |\det a|^{-\frac{1}{2}}\psi(a^{-1}x-t)e^{-2i\pi\xi x}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\det a|^{-\frac{1}{2}}\psi(a^{-1}(x-at))e^{-2i\pi\xi(x-t)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\det a|^{-\frac{1}{2}}g(x-at)e^{-2i\pi\xi x}dx \\
&= e^{-2i\pi\xi.at}|\det a|^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} g(x)e^{-2i\pi\xi x}dx = e^{-2i\pi\xi.at}|\det a|^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\psi(a^{-1}x)e^{-2i\pi\xi x}dx \\
&= e^{-2i\pi\xi.at}|\det a|^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{|\det a^{-1}|}\widehat{\psi}(a^{-T}\xi) = |\det a|^{\frac{1}{2}}\widehat{\psi}(a^{-T}\xi)e^{-2i\pi\xi.at}.
\end{aligned}$$

Pour toute fonction $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, la transformée en ondelette continue W_ψ associée à ψ dans H est l'application définie par

$$\begin{aligned}
f \mapsto (W_\psi f)(a,t) &= \langle f, \psi_{(a,t)}\rangle = |\det a|^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{\psi(a^{-1}x-t)}dx \\
&= |\det a|^{\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{\psi}(a^{-T}\xi)e^{-2i\pi\xi.at}}d\xi
\end{aligned}$$

et celle-ci transforme $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ dans l'espace des fonctions définies sur H. S'il existe une fonction ψ telle que, pour tout $f \in L^2(R)^n$, la formule

$$f = \int_H \langle f, \psi_{(a,t)}\rangle\psi_{(a,t)}d\mu(a,t) \tag{3.5}$$

est produite, alors ψ est une ondelette continue par rapport à H. La formule (3.5) est une généralisation de la reproduction de la formule (3.3) vue ci-haut.

3.3.1 Condition d'admissibilité

Introduisons D, un sous groupe fermé de $GL(n,\mathbb{R})$, et soit donc

$$H = \{(a,t) : a \in D, t \in \mathbb{R}^n\}$$

un sous groupe fermé de G.

La mesure de Haar à gauche sur H est le produit des mesures $d\lambda(a,t) = d\mu_G(a)dt$ où μ_G est la mesure a gauche de Haar sur D. Dans le cas spécial où D est un sous groupe discret de $GL(n,\mathbb{R})$ tel que $\{u^j : j \in \mathbb{Z}\}$ pour tout $u \in GL(n,\mathbb{R})$, nous pouvons prendre μ comme une mesure dénombrable sur D.

Dans ce qui suit, nous cherchons la condition sur D et μ pour laquelle la restriction de $W_\psi f$ à H est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(H, d\lambda)$. En effet s'il existe une fonction $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que pour tout fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ on ait la formule :

$$f = \int_H \langle f, \psi_{a,t}\rangle \psi_{a,t} d\mu(a,t). \tag{3.6}$$

Alors ψ est *une ondelette continue par rapport à D* . Comme on le montre dans [5], le théorème suivant établie la *condition d'admissibilité* pour la fonction ψ satisfasse l'équation (3.6).

Théorème 3.1 *L'égalité* (3.6) *est valide pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si, pour $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ [4]*

$$\Delta(\psi)(\xi) = \int_D |\widehat{\psi}(a^{-T}\xi)|^2 d\mu_G(a) = 1. \tag{3.7}$$

Démonstration. Nous supposons que (3.7) est satisfaite. Alors on a :

$$\begin{aligned}
\|W_\psi f\|^2_{L^2(H,\lambda)} &= \int_D \int_{\mathbb{R}^n} |\langle f, \psi_{a,t}\rangle|^2 dt d\mu_G(a) = \int_D \int_{\mathbb{R}^n} \Big| \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\widehat{\psi}(a^{-T}\xi) e^{2i\pi\xi.at}\Big|^2 |\det a| dt d\mu_G(a) \\
&= \int_D \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \Big| \big(\widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{\psi}(a^{-T}\xi)}\big)^\vee (a,x)\Big|^2 |\det a| dt\Big) d\mu_G(a) \\
&= \int_D \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 |\widehat{\psi}(a^{-T}\xi)|^2 d\xi d\mu_G(a) = \int_{\mathbb{R}_n} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Cela nous montre que $W_\psi : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(H, d\lambda)$ est une isométrie. ■

Nous pouvons donc écrire que pour toutes fonctions $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ nous avons

$$\begin{aligned}
\langle W_\psi f, W_\psi g\rangle_{L^2(H,\lambda)} &= \langle (W_\psi f)^\wedge, (W_\psi g)^\wedge\rangle_{L^2(H)} = \int\limits_H (W_\psi f)^\wedge (\overline{W_\psi g})^\wedge d\mu(a,t) \\
&= \int\limits_D \int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle \widehat{f}(\xi), \overline{\widehat{g}}(\xi)\rangle \langle \widehat{\psi}(a^{-T}\xi), \overline{\widehat{\psi}}(a^{-T}\xi)\rangle |\det a| dt d\mu(a) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle \widehat{f}(\xi), \overline{\widehat{g}(\xi)}\rangle d\xi = \langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Dans le cas spécial où $D = \{aI_n, a > 0\}$, où I_n est une matrice identité $n \times n$ et $d_\mu(aI_n) = \frac{da}{a}$, l'expression (3.7) se réduit à la *condition classique de Calderón* [4]

$$\int\limits_0^\infty |\widehat{\psi}(\xi a)|^2 \frac{da}{a} = 1 \tag{3.8}$$

qui est facile à satisfaire. En effet, quand $n = 1$, l'ensemble

$$\{g \in L^2(\mathbb{R}) : cg\ satisfait\ (3.7)\ pour\ c > 0\ \}$$

est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ (On obtient les mêmes résultats quand $n > 1$). Lorsque $D = \{u^j : j \in \mathbb{Z}\}$ pour $u > 1$, on peut montrer que si

$$\{\psi_{u^j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\} \tag{3.9}$$

est un carde de Parseval, alors ψ est aussi une ondelette continue par rapport à D. Inversement, (3.8) est une condition nécessaire mais pas suffisante pour que $\{\psi_{u^j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ soit un cadre de Parseval.

3.4 Caractérisation de régularité locale des fonctions

Pour $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, la transformée en ondelette continue modifiée $\widetilde{W}_\psi$ associée à ψ et à G est définie comme

$$(\widetilde{W}_\psi f)(a,t) := (\widetilde{W}_\psi f)(a, a^{-1}t) = |\det a|^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{\psi(a^{-1}(x-t))} dx \tag{3.10}$$

et transforme ainsi $f \in {}^2(\mathbb{R}^n)$ dans l'espace des fonctions sur $G = D \times \mathbb{R}^n$. Les modifications ci-dessus découlent de l'utilisation de la fonction d'analyse $|\det a|^{-\frac{1}{2}}\psi(a^{-1}(x-t))$ au lieu de $|\det a|^{-\frac{1}{2}}\psi(a^{-1}x-t)$, et simplifient le problème d'estimation des propriétés de décroissance asymptotique de la transformée en ondelette continue. En effet, pour $G = D \times \mathbb{R}^n$, ou $D = \{aI_n : \ a > 0\}$, considérons la transformée modifiée en ondelettes continues

$$(\widetilde{W}_\psi f)(a,t) := (\widetilde{W}_\psi f)(aI_n, t) = a^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{\psi(a^{-1}(x-t))}dx. \tag{3.11}$$

Une propriété fondamentale de cette transformation est son capacité de caractériser la régularité locale des fonctions. Pour démontrer cette théorie, nous introduisons la notion suivante.

3.4.1 Régularité Hölderienne

Dans cette sections nous nous inspirons de [49] et nous montrons un peu plus précisément comment l'analyse par ondelettes a été utilisée pour caractériser certaines propriétés de régularité des fonctions. Nous allons concentrer essentiellement notre attention sur l'exemple classique de la régularité hölderienne.

Régularité globale

Nous décrivons les propriétés de régularité hölderienne globale facilement caractérisées. Soit $0 < \alpha < 1$. On introduit l'espace de Hölder homogène :

$$\Lambda^\alpha = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \exists \ \ C < \infty \ \ tel \ \ que : |f(x) - f(y)| \leqslant C|x-y|^\alpha \quad \forall x, y \in \mathbb{R}\}.$$

La méthode classique pour caractériser de telles fonctions repose sur la transformée de Fourier. On peut en particulier montrer que si $f(x)$ est une fonction bornée telle que de

plus

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}|(1+|\xi|^{\alpha})d\xi < \infty$$

alors $f \in \Lambda^{\alpha}$. En revanche, la réciproque est en générale fausse.

Pour l'analyse en ondelettes, nous verrons que l'on obtient les résultats similaires. Le résultat suivant procède de la même philosophie que le précédent. Il caractérise la régularité d'une fonction (c'est à dire l'exposant α) par la vitesse de convergence de a synthèse à partir de fonctions régulières(ici, des ondelettes, plus haut des exponentielles complexes)

Théorème 3.2 *Soit $\psi(x) \in L^1(\mathbb{R})$ une ondelette.*

1. *Si ψ est telle que*

$$\int_{\mathbb{R}} (1+|x|^{\alpha})\psi(x)dx < \infty.$$

   Alors $\forall f \in \Lambda^{\alpha}$, $|(\widetilde{W}_{\psi}f)(a,t)| = |\langle f, \psi_{a,b}\rangle| \leqslant K|a|^{\alpha+\frac{1}{2}}$ pour une constante positive finie K.

2. *Réciproquement, si l'ondelette $\psi(x)$ est vérifié :*

$$\int \sup_{\delta<1} |\psi^{'}(u+\delta)|du < \infty$$

   et si $|(\widetilde{W}_{\psi}f)(a,t)| = |\langle f, \psi_{a,b}\rangle| \leqslant K|a|^{\alpha+\frac{1}{2}}$ pour une constante positive finie K, alors $f \in \Lambda^{\alpha}$.

Démonstration.

1. Soit $f \in \Lambda^{\alpha}$. Alors, puisque $\psi(x)$ est une ondelette et donc d'intégral nulle, cela implique que $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)dx = 0$, alors

$$(\widetilde{W}_{\psi}f)(a,t) = \langle f, \psi_{a,b}\rangle = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} (f(x)-f(x_0))\overline{\psi(a^{-1}(x-t))}dx$$

alors en utilisant un changement de variable $\gamma = a^{-1}(x-t)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
|\langle f, \psi_{a,b}\rangle| &\leqslant |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} C|x-x_0|^{\alpha}|\psi(a^{-1}(x-t))|dx \\
&= |a|^{-\frac{1}{2}}|a| \int_{\mathbb{R}} C|a\gamma + (t-x_0)|^{\alpha}|\psi(\gamma)|d\gamma \\
&= C|a|^{\alpha+\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} |\gamma + a^{-1}(t-x_0)|^{\alpha}|\psi(\gamma)|d\gamma \\
&= K|a|^{\alpha+\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

2. Supposons qu'il existe maintenant une constante K telle que l'on ait

$$|(\widetilde{W}_{\psi}f)(a,t)| = |\langle f, \psi_{a,b}\rangle| \leqslant K|a|^{\alpha+\frac{1}{2}}.$$

On a donc, en se rappelant que la transformation en ondelettes peut s'écrire (3.1)

$$(W_{\psi}f(x))(s) = (f * \tilde{\psi}_a)(b)$$

$$\begin{aligned}
f(x) - f(y) &= \int [f * \tilde{\psi}_a * \overline{\tilde{\psi}_a}(x) - f * \tilde{\psi}_a * \overline{\tilde{\psi}_a}(y)]\frac{da}{a} \\
&= \int_0^{|x-y|} [f * \tilde{\psi}_a * \overline{\tilde{\psi}_a}(x) - f * \tilde{\psi}_a * \overline{\tilde{\psi}_a}(y)]\frac{da}{a} \\
&+ \int_{|x-y|}^{\infty} [f * \tilde{\psi}_a * \overline{\tilde{\psi}_a}(x) - f * \tilde{\psi}_a * \overline{\tilde{\psi}_a}(y)]\frac{da}{a}.
\end{aligned}$$

La première intégrale s'estime :

$$\begin{aligned}
|\int_0^{|x-y|} [f * \tilde{\psi}_a * \overline{\tilde{\psi}_a}(x) - f * \tilde{\psi}_a * \overline{\tilde{\psi}_a}(y)]\frac{da}{a}| &\leqslant 2|\int_0^{|x-y|} [f * \tilde{\psi}_a * \overline{\tilde{\psi}_a}(x)\frac{da}{a}| \\
&\leqslant 2\|\psi_a\|_1 K \int_0^{|x-y|} a^{\alpha+\frac{1}{2}}\frac{da}{a} \\
&\leqslant K_I|x-y|^{\alpha+\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Et la seconde :

$$
\begin{aligned}
&|\int_{|x-y|}^{\infty}[f*\tilde{\psi}_a*\overline{\tilde{\psi}_a}(x)-f*\tilde{\psi}_a*\overline{\tilde{\psi}_a}(y)]\frac{da}{a}| \\
&\leqslant \int_{|x-y|}^{\infty}|\psi_a(x-b)-\psi_a(y-b)||(\widetilde{W}_\psi f)(a,b)|\frac{da}{a}db \\
&\leqslant K\int_{|x-y|}^{\infty}a^{\alpha-\frac{1}{2}}\int|\psi(u-\frac{x-y}{a})-\psi(u)|du\frac{da}{a} \\
&\leqslant K\int_{|x-y|}^{\infty}a^{\alpha-\frac{1}{2}}\frac{|x-y|}{a}\int\sup_{\delta<1}|\psi^{'}(u+\delta)|du \\
&\leqslant K_{II}|x-y|^{\alpha+\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

En réunissant les deux estimations, on obtient :

$$|f(x)-f(y)|\leqslant K^{'}|x-y|^{\alpha+\frac{1}{2}}$$

qui achève la démonstration du théorème.

■

Cela montre que, au point $t=x_0$, la transformée en ondelette continue de la fonction f décroit (au moins) de $a^{\alpha+\frac{1}{2}}$ quand $a\longrightarrow 0$. De même, soit $n<\alpha<n+1$. L'espace de Hölder homogène correspondant est

$$\Lambda^{\alpha}=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{C},\exists\ \ C<\infty,P(x)$$
$$polynome\ \ de\ \ degre^{'}\leqslant n,|f(x)-P(x-y)|\leqslant C|x-y|^{\alpha}\quad\forall x,y\in\mathbb{R}\}.$$

Si $f(x)\in C^n(\mathbb{R})$, alors $P(x-y)$ n'est autre que le développement de Taylor de $f(x)$ d'ordre n.

Pour analyser de tels espaces, il est nécessaire d'utiliser des ondelettes possédant un nombre plus de moments nuls. En effet, en utilisant des techniques en tout points similaires à la précédente, il faut annuler la contribution de $P(x-b)$, c'est à dire écrire

$$\int f(x)\psi(a^{-1}(x-t))dx=\int[f(x)-P(x-b)]\overline{\psi(a^{-1}(x-t))}dx$$

ce qui est fait en supposant

$$\int x^k \psi(x) dx = 0 \ \ \forall \ \ k = 0, \cdots, n.$$

Ainsi peut-on dire que, dans un certain sens, l'ondelette ne voit pas les premiers termes réguliers de $f(x)$ et analyse uniquement la partie singulière. Pour la deuxième partie du théorème, elle se généralise en faisant l'hypothèse de régularité supplémentaire sur l'ondelette.

Exemple 3.3 *Si la fonction f a un point de discontinuité au point x_0, alors nous pouvons montrer que sa transformée en ondelette continue décroit de $a^{\frac{1}{2}}$, quand $a \longrightarrow 0$, et on a les propriétés similaires en plusieurs dimensions (voir [51]).*

Régularité locale

Nous avons vu comment caractériser la régularité hölderienne globale des fonctions avec la transformée en ondelettes. Mais la transformée en ondelettes étant une méthode que l'on peut qualifier de locale, elle permet aussi d'étudier les propriétés de régularité locale des fonctions. Prenons l'exemple de la régularité hölderienne. Nous allons voir comment caractériser « presque caractériser » les exposent de Hölder locaux des fonctions à l'aide de la transformée en ondelettes. Dans ce but, nous dirons que $f \in \Lambda^{\alpha}_{x_0}$, s'il existe une constante K telle que $\forall \in \mathbb{R}$

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| \leqslant K|h|^{\alpha}.$$

On obtient alors le résultat suivant, qui est une version locale du Théorème 3.2. Si f possède une certaine régularité (ici l'exposant α) en un point x_0, sa transformée en ondelette va avoir le même comportement que précédemment par rapport à la variable d'échelle [49].

Théorème 3.4 *Soit $f \in \Lambda^{\alpha}_{x_0}$ et $\psi(x) \in L^1(\mathbb{R})$ tel que*

$$\int |\psi(x)|^{\alpha}|\psi(x)|dx < \infty.$$

Alors il existe une constante C telle que

$$(\widetilde{W}_{\psi}f)(a,t) = \langle f, \psi_{a,b}\rangle \leqslant C(a^{\alpha} + |t - x_0|^{\alpha}).$$

Ainsi, on trouve l'exposant en étudiant le comportement de la transformée en ondelettes à travers les échelles. L'information supplémentaire, à savoir le coté local du comportement hölderien, se trouve dans le terme en $O(|t - x_0|^{\alpha})$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} |(\widetilde{W}_{\psi}f)(a,t)| = |\langle f, \psi_{a,b}\rangle| &= |\int_{\mathbb{R}} (f(x) - f(x_0))\psi_{a,t})dx \\ &\leqslant \frac{K}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} [|x-t|^{\alpha} + |t - x_0|^{\alpha}]\overline{\psi(a^{-1}(x-t))}dx \end{aligned}$$

d'où

$$|(\widetilde{W}_{\psi}f)(a,t)| \leqslant K_1 a^{\alpha} + K_2|t - x_0|^{\alpha}$$

avec

$$K_1 = K \int |a|^{\alpha}|\psi(x)|dx$$
$$K_2 = K\|\psi\|_1$$

ce qui conclut la démonstration. ■

En revanche la réciproque est en générale fausse, mais vraie « à un logarithme près », comme le montre S. Jaffard [35] et M. Holschneider et Ph. Tchamitchian [32]. Si la transformée en ondelettes de $f(x)$ satisfait aux estimations locales précédentes (à un logarithme près), ainsi qu'à une condition de régularité globale supplémentaire, alors la fonction elle-même est régulière.

Tandis que la transformée en ondelettes continues (3.11) est capable de décrire la régularité locale de fonctions et de détecter l'emplacement des points de singularité à travers sa décroissance à des échelles fines, elle ne fournit pas d'informations supplémentaires sur la géométrie de l'ensemble des singularités. Pour atteindre cette capacité supplémentaire, on doit considérer les transformées en ondelettes associées à plusieurs groupes de dilatations générales comme on le montre dans la section suivante.

3.5 Transformée continue en Ondelette de Cisaillement (OC)

Dans cette section, nous considérons la dimension $n = 2$. Soit M un sous groupe de $GL(2, \mathbb{R})$ des matrices de la forme

$$M = \left\{ m_{a,s} = \begin{pmatrix} a & -a^{\frac{1}{2}}s \\ 0 & a^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} : a > 0, s \in \mathbb{R} \right\} \tag{3.12}$$

et considérons la transformée en ondelette continue généralisée correspondante

$$(\widetilde{W}_\psi f)(a, s, t) := (\widetilde{W}_\psi f)(m_{a,s,t}) = a^{-\frac{3}{4}} \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \overline{\psi(m_{a,s}^{-1}(x-t))} dx,$$

où $a > 0, s \in \mathbb{R}^2$, et $t \in \mathbb{R}^2$. On vérifie facilement qu'on a la factorisation

$$m_{a,s} = \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix};$$

ainsi, $m_{a,s}$ est un produit d'une matrice de dilatation anisotrope $\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$ et une matrice de cisaillement $\begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Par conséquence, la fonction analysante

$$\psi_{a,s,t}(x) = a^{-\frac{3}{4}} \psi(m_{a,s}^{-1}(x-t)) = a^{-\frac{3}{4}} \psi\Big(\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{s}{a} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{pmatrix} (x-t) \Big).$$

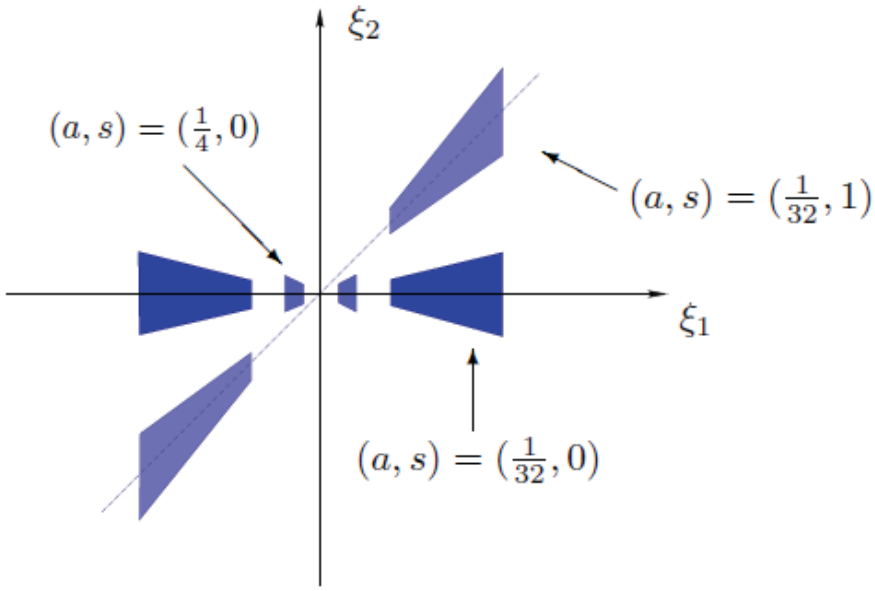

Figure 3.1 – Support des OC $\widehat{\psi}_{a,s,t}$ (Dans le domaine de Fourier) pour différentes valeurs de a et de s [38].

associée à cette transformation range et contrôle différentes échelles, orientations, emplacement par les variables a, s et t respectivement. En plus, pour $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\xi_1 \neq 0$, nous admettons que

$$\widehat{\psi}(\xi_1, \xi_2) = \widehat{\psi}_1(\xi_1)\widehat{\psi}_2(\frac{\xi_1}{\xi_2}).$$

Par conséquent, en utilisant la transformée de Fourier , on a

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi}_{a,s,t}(\xi) &= a^{-\frac{3}{4}}\mathcal{F}\Big(\psi\Big(\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{s}{a} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{pmatrix}(x-t)\Big)\Big)(\xi) \\
&= a^{-\frac{3}{4}}e^{-2i\pi\langle\xi,t\rangle}\mathcal{F}\Big(\psi\Big(\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{s}{a} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{pmatrix}x\Big)\Big)(\xi) \\
&= a^{-\frac{3}{4}}e^{-2i\pi\langle\xi,t\rangle}(a^{-\frac{3}{2}})^{-1}\widehat{\psi}\Big(\begin{pmatrix} a & 0 \\ s\sqrt{a} & \sqrt{a} \end{pmatrix}\xi\Big) \\
&= a^{\frac{3}{4}}e^{-2i\pi\langle\xi,t\rangle}\widehat{\psi}(a\xi_1, \sqrt{a}(s\xi_1 + \xi_2)) \\
&= a^{\frac{3}{4}}e^{-2i\pi\langle\xi,t\rangle}\widehat{\psi}_1(a\xi_1)\widehat{\psi}_2\Big(a^{-\frac{1}{2}}\Big(\frac{\xi_2}{\xi_1} + s\Big)\Big).
\end{aligned}$$

Ainsi la transformée en OS continue de la fonction f est

$$\begin{aligned}
\mathcal{OC}(f)(a,s,t) &= \langle f, \psi_{a,s,t}\rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{\psi}_{a,s,t}\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}(\xi)\overline{\psi_{a,s,t}(\xi)}d\xi \\
&= a^{\frac{3}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}(\xi)\widehat{\psi}_1(a\xi_1)\widehat{\psi}_2\Big(a^{-\frac{1}{2}}\Big(\frac{\xi_2}{\xi_1}+s\Big)\Big)e^{2i\pi\langle\xi,t\rangle}d\xi \\
&= a^{\frac{3}{2}}\mathcal{F}^{-1}\big(\widehat{f}(\xi)\widehat{\psi}_1(a\xi_1)\widehat{\psi}_2\Big(a^{-\frac{1}{2}}\Big(\frac{\xi_2}{\xi_1}+s\Big)\Big)\big)(t).
\end{aligned}$$

3.5.1 Condition d'admissibilité

En s'inspirant du Théorème 3.1, nous établissons de simples conditions sur la fonction ψ pour qu'elle satisfasse la condition de Caldéron conduisant ainsi à la formule de décomposition (3.3).

Théorème 3.5 *Soit M donné par* (3.12) *et pour $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, $\xi_2 \neq 0$. Soit aussi ψ donnée par*

$$\widehat{\psi}(\xi_1,\xi_2) = \widehat{\psi}_1(\xi_1)\widehat{\psi}_2(\frac{\xi_1}{\xi_2}).$$

On a

$$\int\limits_0^\infty |\widehat{\psi}_1(a\xi_1)|^2\frac{da}{a} = 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

De plus

$$\|\psi_2\|_2 = 1.$$

Alors ψ satisfait (3.3) et, donc, ψ est une ondelette continue par rapport à G.

Démonstration. Comme on l'a démontré ci-haut on a $m_{a,s}^{-1}\xi = (a\xi_1, \sqrt{a}(s\xi_1+\xi_2)$. Aussi, notons que la mesure a gauche de Haar sur les éléments de M est $d\mu(m_{as}) = \frac{da}{|\det m_{as}|}ds$. Donc la condition d'admissibilité pour ψ est

$$\Delta(\psi)(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}^+} |\widehat{\psi}_1(a\xi_1)|^2|\widehat{\psi}_2(a^{-\frac{1}{2}}(\frac{\xi_2}{\xi_1}+s))|^2\frac{da}{a^{\frac{3}{2}}}ds \tag{3.13}$$

pour $\xi \in \mathbb{R}^2$. Or, par le Théorème 3.1, pour montrer que ψ est une ondelette continue, par rapport à G, il suffit de montrer que (3.13) est satisfaite. En utilisant l'hypothèse sur ψ_1 et ψ_2, nous avons

$$\begin{aligned}
\Delta(\psi)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} |\widehat{\psi}_1(a\xi_1)|^2 |\widehat{\psi}_2(a^{-\frac{1}{2}}(\frac{\xi_2}{\xi_1} + s))|^2 \frac{da}{a^{\frac{3}{2}}} ds \\
&= \int_{\mathbb{R}^+} |\widehat{\psi}_1(a\xi_1)|^2 \Big(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}_2(a^{-\frac{1}{2}} s \frac{\xi_2}{\xi_1} + s)|^2 ds \Big) \frac{da}{a} \\
&= \int_{\mathbb{R}^+} |\widehat{\psi}_1(a\xi_1)|^2 \frac{da}{a}.
\end{aligned}$$

■

Ainsi, la transformée continue en OC est une application telle que pour chaque fonction f, on a

$$f \mapsto \{\mathcal{OC}(f)(a,s,t) = \langle f, \psi_{a,s,t} \rangle : a > 0,\ s \in \mathbb{R},\ \ t \in \mathbb{R}^2\}$$

et où les éléments analysants sont

$$\{\psi_{a,s,t}(x) = |\det m_{a,s}|^{-\frac{1}{2}} \psi(m_{a,s}^{-1}(x-t)) : a > 0,\ s \in \mathbb{R},\ \ t \in \mathbb{R}^2\}$$

forment un système des OC continues.

3.5.2 Caractérisation des points de discontinuités par les OC en 2D

[25]

Grâce aux propriétés associées au groupe de dilatation M, la transformée en OC continue est capable de détecter non seulement l'emplacement des points de singularité à travers ses décroissances aux différentes échelles fines mais aussi l'information géométrique de la singularité. Plus précisément, nous supposons que le contour de la région

S, notée ∂S, est une simple courbe longueur finie L, lisse par morceaux, sauf peut-être pour un nombre fini points d'angle. Plus précisément pour définir ces points d'angle, il est utile d'introduire un paramétrisation pour ∂S. Soit $\alpha(t)$ le paramétrage de ∂S par rapport au paramètre t. Pour tout $t \in (0, L)$ et pour $j \geqslant 0$, nous prétendons que $\lim\limits_{t \to t_0^-} = \alpha^j(t_0^-)$ et $\lim\limits_{t \to t_0^+} = \alpha^j(t_0^+)$ existent.

Soit aussi $n(t^-)$ et $n(t^+)$ les directions normales extérieures de ∂S à $\alpha(t)$ à gauche et à droite respectivement ; Si les deux directions sont égales, nous écrivons simplement $n(t)$. D'une même manière, pour une courbure de ∂S, nous utilisons les notations $k(t^-)$ et $k(t^+)$. Nous disons donc que $t = \alpha(t_0)$ est un point d'angle de ∂S si

1. $\alpha^{'}(t_0^-) \neq \pm\alpha^{'}(t_0^+)$ ou
2. $\alpha^{'}(t_0^-) = \pm\alpha^{'}(t_0^+)$, mais que $k(t^-) \neq k(t^+)$.

Quand 1. est vérifié, nous disons que t *est un point d'angle de premier type* et si 2. est vérifié nous disons que t *est un point d'angle de second type*. De l'autre coté, si $\alpha(t)$ est infiniment différentiable à t_0, nous disons que $\alpha(t_0)$ est un point régulier de ∂S. Finalement, nous disons que le contour de courbe $\alpha(t)$ est *continue par morceaux* si les valeurs de $\alpha(t)$ sont des points régulier $\forall 0 \leqslant t \leqslant L$, sauf pour un nombre fini de points d'angle. Soit $t = \alpha(t_0)$ un point régulier et soit $s = tan(\theta_0)$, avec $\Theta(\theta_0)$. Nous disons que s correspond à la direction normale de ∂S en t si $\Theta(\theta_0) = \pm n(t_0)$. Nous pouvons procéder de la même manière quand $x(t_0)$ est un point d'angle . Pourtant dans ce cas il doit y avoir deux directions normales extérieures $n(t_0^-)$ et $n(t_0^+)$. On a donc le résultat suivant.[25]

Théorème 3.6 *Soit $B = \chi_S$, où $S \subset \mathbb{R}^2$ dont la frontière ∂S est une courbe lisse par morceaux*

1. *Si $t \notin \partial S$, alors $\widetilde{W}B(a, s, t)$ a une décroissance asymptotique rapide, quand $a \longrightarrow 0$,*

pour chaque $s \in \mathbb{R}$. Ainsi, on montre que

$$\lim_{a \to 0} a^{-N} \widetilde{W}_\psi B(a, s, t) = 0, \quad \forall N > 0. \tag{3.14}$$

2. *Si $t \in \partial S$ et ∂S est lisse dans le voisinage de t, alors $\widetilde{W}_\psi B(a, s, t)$ a une décroissance asymptotique rapide, quand $a \longrightarrow 0$, pour chaque $s \in \mathbb{R}$ sauf si $s = tan\theta_0$ et $(cos\theta_0, sin\theta_0)$ est une direction normale à ∂S au point t. Dans le dernier cas, $\widetilde{W}_\psi B(a, s_0, t) \backsim a^{\frac{3}{4}}$, quand $a \longrightarrow 0$. On montre que*

$$\lim_{a \to 0} a^{-\frac{3}{4}} \widetilde{W}_\psi B(a, s, t) = C \neq 0. \tag{3.15}$$

3. *Si t est un sommet de ∂S et $s = tan\theta_0$ où $(cos\theta_0, sin\theta_0)$ est l'une des directions normales à la frontière ∂S au point t, alors $\widetilde{W}_\psi B(a, s_0, t) \backsim a^{\frac{3}{4}}$, quand $a \longrightarrow 0$. Pour tout autre directions, la décroissance asymptotique $\widetilde{W}_\psi B(a, s, t)$ est plus rapide et dépend d'une façon complexe de la courbure de la frontière de ∂S au voisinage t.*

La démonstration se trouve dans [25].

Notons que, par « décroissance rapide », nous voulons dire que, étant donné $N \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C_N > 0$ telle que $|\widetilde{W} B(a, s, t)| \leqslant C a^a$, quand $a \to 0$. De tels résultats sont vérifiés en plusieurs dimensions et pour les autres types d'ensemble de singularités. Dans la définition de $\widetilde{W}_\psi B(a, s, t)$ nous avons pris le produit scalaire de la fonction f avec des OC continues $T_t D_{m_{as}}^{-1}$. De l'autre coté, les OC discrets dans « Ondelettes en plusieurs dimensions » transformée en OC continues sont liées aux propriétés d'approximation en OC discrètes.

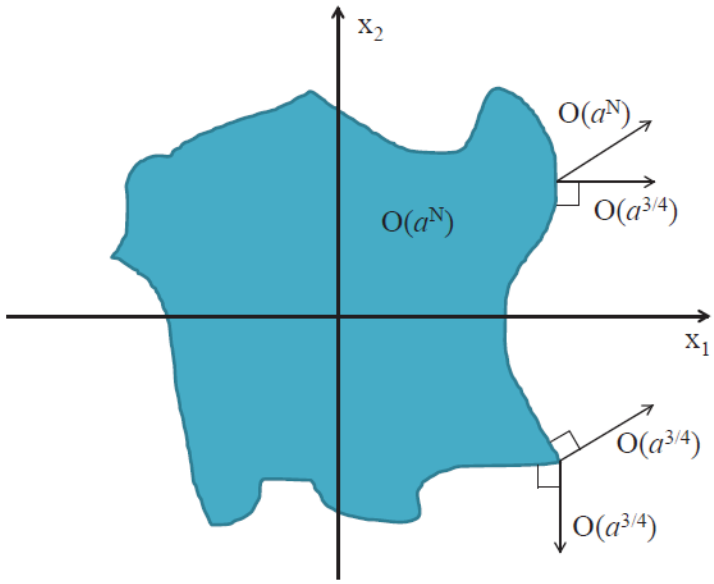

Figure 3.2 – Région générale S avec une bordure lisse par morceaux ∂S. La transformée en OC continues de $B = \chi_S$ a une décroissance asymptotique rapide sauf si la variable t est localisée sur le contour S et la variable de cisaillement s correspond à la direction normale à l'instant t ; dans ce cas $\widetilde{W}_\psi B(a,s,t) \backsim a^{\frac{3}{4}}$, quand $a \longrightarrow 0$. Le même taux de décroissance lente se produit au niveau des points d'angle, pour les directions normales [25].

CONCLUSION

Le nombre de chercheurs qui ont travaillé et travaillent sur les ondelettes sont très grand. Ce champ et ses applications sont énormes. Nous ne pouvons pas couvrir tous les sujets qui sont les plus importants et intéressants dans ce travail. Nous ne faisons aucune affirmation selon laquelle nous avons choisi de couvrir "le plus sujets importants" sur ondelettes. Dans ce travail nous avons défini les ondelettes comme des éléments de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$. En fait, nous pouvons étendre les techniques d'ondelettes que nous avons décrit à l'espace de Banach $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \neq 2$. Comme d'habitude, le goût pour $1 < p < 2$ est très différent de $p \geqslant 2$. On a montré que les rôles joués par $\mathbb{R}$ et le 1-tore $\mathbb{T}$ peuvent être étendus à plusieurs dimensions. Il est bien connu que l'analyse harmonique portant sur $(\mathbb{Z}, \mathbb{T})$ s'étend au cadre $(G, \widehat{G})$ où G est un groupe abélien localement compact et $\widehat{G}$ son dual. La théorie des ondelettes s'étend à $(G, \widehat{G})$ et d'autres cadres abstraits. Les ondelettes continuent de stimuler et inspirer la recherche active allant au-delà du domaine de l'analyse harmonique, où elles ont été introduites à l'origine. Pendant les années 1980 et 1990, la plupart de la théorie des ondelettes a été consacrée à la construction des bases d'ondelettes "gentilles" et leurs applications au débruitage et la compression, au cours de la dernière décennie la recherche en ondelettes a été axée davantage sur le sujet des approximations dite "Sparse approximations". Comme nous mentionné ci-dessus, plusieurs généralisations et extensions des ondelettes ont été introduites dans le but de fournir de meilleures propriétés d'approximation

pour les classes spéciales de fonctions où l'approche la plus traditionnelle d'ondelettes n'est pas aussi efficace. Cette recherche a stimulé l'enquête de systèmes de fonctions redondantes (des cadres qui ne sont pas nécessairement serrés) et leurs applications en utilisant des techniques provenant non seulement de l'analyse harmonique mais aussi de la théorie d'approximation et probabilité. Le domaine émergent détection comprimé, par exemple, peut être considéré comme un procédé pour atteindre les mêmes propriétés d'approximation non-linéaire en ondelettes et leur généralisation par utilisation des mesures linéaires définies selon une certaine stratégie intelligente.

Quelques idées fondamentales de la théorie des ondelettes, notamment l'AMR, ont apparu dans d'autres formes dans des contextes très différents. Par exemple, la théorie des ondelettes de diffusion [13] fournit un procédé pour l'analyse multi-échelle de collecteurs, graphiques et nuages de points dans un espace euclidienne. Plutôt que d'utiliser des dilatations comme dans la théorie classique des ondelettes, cette approche utilise " diffusion opérateurs " agissant sur les fonctions de l'espace. Par exemple, soit T un opérateur de diffusion (par exemple, l' opérateur de la chaleur) agissant sur un graphique (le graphique peut être une discrétisation d'un collecteur). L'étude des fonctions propres et valeurs propres de T est connu comme théorie des graphes spectrale et peut être considéré comme une généralisation de la théorie des séries de Fourier sur le tore. L'idée principale de ondelettes de diffusion est de calculer le pouvoir dyadique de l'opérateur T d'établir une échelle pour réaliser une AMR sur le graphique. Cette approche a beaucoup d'applications utiles, car il permet d'appliquer les avantages de l'AMR d'objets qui peuvent être modélisés sous forme de graphiques, tels que les structures chimiques, réseaux sociaux, etc. Afin de décrire les applications plus récentes inspirées par ondelettes, nous citons Coifman dans [11] p. 159 :

Au cours des vingt dernières années, nous avons vu l'introduction des outils analytiques pour le calcul adaptatif qui permettent aux transcriptions flexibles du monde physique. Ces outils permettent à l'orchestration des signaux en constituants (partitions musicales

et mathématiques) et ouvrent les portes à une variété d'implémentations numériques/applications en ingénierie et la science. Bien sûr, je me réfère aux ondelettes et différentes versions de calcul en Analyse Harmonique. Les principaux concepts sous-jacents ces idées impliqués l'adaptation de l'analyse de Fourier à l'évolution des géométries ainsi que des structures multi-échelles des données naturelles. Ainsi, ces méthodologies semblent se limiter à analyser et traiter les données physiques seulement. Remarquablement, les dernières années ont vu une explosion de l'activité dans l'apprentissage de la machine, l'analyse des données et la recherche, ce qui implique que les idées et les concepts similaires, inspirés par le traitement du signal peut transporter autant de puissance dans le contexte de l'orchestration des données massives pour les ensembles en plusieurs dimensions. Ces données numériques, par exemple, des documents texte, enregistrements médicaux, la musique, les données des capteurs, des données financières, etc., peuvent être structurées en géométries qui résultent dans l'organisation de nouvelles langages et le renforcement des connaissances. Dans ces structures, la bâtiment de l'ontologie hiérarchique conventionnel paradigme fusionne avec un mélange de l'analyse harmonique et géométrie combinatoire. Conceptuellement ces outils permettent l'intégration des modèles d'association locale dans les structures globales à peu près de la même manière que le calcul permettant la récupération d'une fonction globale à partir d'un modèle linéaire locale pour sa variation. Comme il se trouve, de telles extensions du calcul différentiel dans les champs de données numériques sont désormais possibles et ouvrent la porte à la l'utilisation des mathématiques à une envergure similaire à la révolution newtonienne dans les sciences physique sciences. Plus précisément, nous voyons ces outils comme engendrant le domaine de l'apprentissage mathématique dans lequel les données brutes considérées comme des nuages de points dans l'espace de paramètre en plusieurs dimensions bien organisées géométriquement de la même manière que dans la mémoire, simultanément organiser et relier les événements associés, ainsi que la construction d'un langage descriptif.

Nous allons illustrer trois exemples qui nous donnera une idée plus concrète de ce que Coifman affirme (voir aussi [12]).
(A) Dans l'exploration pétrolière et l'industrie minière, il faut décider où percer ou miner pour avoir la plus grande probabilité de trouver du pétrole, du gaz, du cuivre, ou d'autres minéraux. Cela implique une analyse de la composition et la structure du sol dans un certain région. De cette analyse, on pourrait trouver les propriétés qui optimisent l'endroit où ces ressources sont les plus susceptibles de se trouver.
(B) Supposons que nous voulons décomposer une grande collection de livres en sous-classes de livres "similaires", par exemple, des romans, des livres d'histoires, des livres de physique, des livres de mathématiques, etc. Peut-être que nous voulons aussi d'attribuer une "distances" entre ces sous-classes. Il est raisonnable que les distributions de beaucoup de mots particuliers contenus dans chaque livre peut identifier les différents types de livres afin qu'ils puissent être affectés dans une sous-classe spécifique.
(C) Dans les diagnostics médicaux, des informations importantes peuvent être tirées à partir de l'analyse des données obtenues à partir, tests histologiques, chimiques, radiologiques, et cela est important pour arriver à un stade de détection précoce des tumeurs potentiellement dangereuses et d'autres pathologies.
Ce qui est surprenant est que l'analyse de ces très différents types de données peuvent être exécutées très efficace en utilisant le type de mathématiques basé sur les idées présentées dans ce travail. L'impact pratique de ces idées dans les applications est remarquable. Par exemple, plusieurs hôpitaux ont adopté des méthodes de diagnostic médical qui ont été développés par Coifman et son groupe à l'aide méthodes basées sur ondelettes.

En conclusion, nous tenons à souligner que les ondelettes constituent un immense champ dont beaucoup d'auteurs ont contribué à la création. Cependant, nous voulons

dire que Yves Meyer a contribué et introduit de nombreuses idées qui ont été les plus importantes dans sa création. Le matériel de le premier chapitre de [31] décrit de nombreuses constructions qui sont dues à lui et les idées qui ont ouvert la voie à un grand nombre de sujets (par exemple, l'ARM) que nous avons présentés dans ce travail.

Bibliographie

[1] George Bachman, Lawrence Narici, and Edward Beckenstein. *Fourier and Wavelet Analysis*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2000.

[2] Guy Battle and Paul Federbush. Ondelettes and phase cell cluster expansions, a vindication. *Comm. Math. Phys.*, 109(3) :417–419, 1987.

[3] Albert Boggess and Francis J. Narcowich. *A First Course in Wavelets with Fourier Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, second edition, 2009.

[4] A.-P. Calderón. Intermediate Spaces and Interpolation, the complex method. *Studia Math.*, 24 :113–190, 1964.

[5] A.-P. Calderón. Intermediate spaces and interpolation, the complex method. *Studia Math.*, 24 :113–190, 1964.

[6] Emmanuel J Candès and David L Donoho. Ridgelets : A K ey to Higher-Dimensional Intermittency ? *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 357(1760) :2495–2509, 1999.

[7] Emmanuel J. Candès and David L. Donoho. New Tight Frames of Curvelets and Optimal Representations of Objects with Piecewise C^2 Singularities. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 57(2) :219–266, 2004.

[8] Carlo Cattani. Shannon Wavelets Theory. *Math. Probl. Eng.*, pages Art. ID 164808, 24, 2008.

[9] Ole. Christensen. *FRAMES AND BASES : An Introduction Cours*. Birkhauser, Boston. Basel. Berkin, 2008.

[10] A. Cohen, Ingrid Daubechies, and J.-C. Feauveau. Biorthogonal Bases of Compactly Supported Wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 45(5) :485–560, 1992.

[11] Jonathan Cohen and Ahmed I. Zayed, editors. *Wavelets and Multiscale Analysis*. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser/Springer, New York, 2011. Theory and applications.

[12] Ronald R. Coifman and Matan Gavish. Harmonic Analysis of Digital Data Bases. In *Wavelets and multiscale analysis*, Appl. Numer. Harmon. Anal., pages 161–197. in [11], 2011.

[13] Ronald R. Coifman and Mauro Maggioni. Diffusion wavelets. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 21(1) :53 – 94, 2006. Special Issue : Diffusion Maps and Wavelets.

[14] Steven B. Damelin and Wiilard Miller Jr. *The Mathematics of Signal Processing*. Cambridge Texts in Applied Mathematics 48. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[15] Ingrid Daubechies. Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.*, 41(7) :909–996, 1988.

[16] Ingrid Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*, volume 61 of *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1992.

[17] Labate Demetrio, Weiss Guido, and Wilson Edward. Wavelets. *American Mathematics Society*, 60(1), 2013.

[18] David L. Donoho. Wedgelets : Nearly Minimax Estimation of Edges. *Ann. Statist.*, 27(3) :859–897, 06 1999.

[19] David L. Donoho and Iain M. Johnstone. Ideal Spatial Adaptation by Wavelet Shrinkage. *Biometrika*, 81, 1994.

[20] Prof. V.M. Gadre. Wavelets and Mutlirate Digital Signal Processing : Lecture 3 : Haar MRA (multi resolution analysis). *EE, IIT, Bombay.*

[21] Gustavo Garrigós, Eugenio Hernández, Hrvoje Šikić, Fernando Soria, Guido Weiss, and Edward Wilson. Connectivity in the Set of Tight Frame Wavelets (TFW). *Glas. Mat. Ser. III*, 38(58)(1) :75–98, 2003.

[22] A. Grossmann. Wavelet transforms and edge detection. In *Stochastic processes in physics and engineering (Bielefeld, 1986)*, volume 42 of *Math. Appl.*, pages 149–157. Reidel, Dordrecht, 1988.

[23] A. Grossmann and J. Morlet. Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape. *SIAM J. Math. Anal.*, 15(4) :723–736, 1984.

[24] Kanghui Guo and Demetrio Labate. Optimally Sparse Multidimensional Representation Using Shearlets. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 39(1) :298–318, 2007.

[25] Kanghui Guo and Demetrio Labate. Analysis and Identification of Multidimensional Singularities Using the Continuous Shearlet Transform. In Gitta Kutyniok and Demetrio Labate, editors, *Shearlets*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, pages 69–103. Birkhäuser Boston, 2012.

[26] Kanghui Guo and Demetrio Labate. Optimally Sparse Representations of $3D$ Data With C^2 Surface Singularities Using Parseval Frames of Shearlets. 44(2) :851–886, 2012.

[27] Kanghui Guo, Demetrio Labate, Wang-Q Lim, Guido Weiss, and Edward Wilson. Wavelets With Composite Dilations and their MRA Properties. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 20(2) :202–236, 2006.

[28] Alfred Haar. Zur Theorie der Orthogonalen Funktionensysteme. *Mathematische Annalen*, 69(3) :331–371, September 1910.

[29] Morton Hamermesh. Lie Goups for Physicists : by R. Hermann. Benjamin. *Journal of the Franklin Institute*, 282(4) :265 –, 1966.

[30] Hernández, Eugenio, Šikić, Hrvoje, Guido Weiss, and Edward Wilson. *On the Properties of the Integer Translates of a Square Integrable Function in* $L^2(\mathbb{R})$, volume 505 of *Contemp. Math.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[31] Eugenio Hernández and Guido Weiss. *A First Course on Wavelets*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1996. With a foreword by Yves Meyer.

[32] Tchamitchian Ph. Holschneider, M. Pointwise Analysis of Riemann's "nondifferentiable" Function. *Inventiones mathematicae*, 105(1) :157–176, 1991.

[33] Lars Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators. I*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003. Distribution theory and Fourier analysis, Reprint of the second (1990) edition [Springer, Berlin ; MR1065993 (91m :35001a)].

[34] Saturo Igari. *Real Analysis with an Introduction to Wavalet Theory*, volume 177. American Mathemetical Society, Collection : Translations of mathematical monographs, Providence, Rhode Island, 1998.

[35] Stéphane Jaffard. Exposants de Hölder en des Points Donnés et Cefficients d'Ondelettes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 308(4) :79–81, 1989.

[36] Ilya A. Krishtal, Benjamin D. Robinson, Guido L. Weiss, and Edward N. Wilson. Some Simple Haar-type Wavelets in Higher Dimensions. *J. Geom. Anal.*, 17(1) :87–96, 2007.

[37] R. Kronland-Martinet, J. Morlet, and A. Grossmann. Analysis of Sound Patterns through Wavelet Transforms. *Int. J. Patt. Recogn. Artif. Intell.*, 01(02) :273–302, August 1987.

[38] Demetrio Labate and Guido Weiss. Continuous and Discrete Reproducing Systems that Arise from Translations. Theory and Applications of Composite Wavelets. pages 87–130, 2010.

[39] Stephane G. Mallat. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbf{R})$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 315(1) :69–87, 1989.

[40] Stèphane G. Mallat. A Theory for Multiresolution Signal Decomposition : The Wavelet Representation. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 11(7) :674–693, 1989.

[41] Stèphane G. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, third edition, 2009. The sparse way, With contributions from Gabriel Peyrè.

[42] Stèphane G. Mallat and Gabriel Peyrè. Orthogonal Bandelet Bases for Geometric Images Approximation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 61(9) :1173–1212, 2008.

[43] Y. Meyer. Ondelettes et fonctions splines. In *Séminaire sur les équations aux dérivées partielles 1986–1987*, pages Exp. No. VI, 18. École Polytech., Palaiseau, 1987.

[44] Yves Meyer. Principe d'incertitude, bases hilbertiennes et algèbres d'opérateurs. *Astérisque*, (145-146) :4, 209–223, 1987. Séminaire Bourbaki, Vol. 1985/86.

[45] Yves Meyer. *Wavelets and operators*, volume 37 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992. Translated from the 1990 French original by D. H. Salinger.

[46] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. Number 2 in 45. McGraw-Hill, 1987.

[47] David S. Taubman, Michael W. Marcellin, and Majid Rabbani. Image Compression Fundamentals, Standards and Practice. *Journal of Electronic Imaging*, 11, 2002.

[48] Philippe Tchamitchian. Biorthogonalité et théorie des opérateurs. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 3(2) :163–189, 1987.

[49] Bruno Torrésani. *Analyse Continue par ondelettes.* CEDP Sciences (COURTABOEUF), 1995.

[50] Vyacheslav Zavadsky. *Image Approximation by Rectangular Wavelet Transform*, volume 27. Kluwer Academic Publishers, 2007.

[51] R.A. Zuidwijk. M. Holschneider : Wavelets : An Analysis Tool. *Journal of Approximation Theory*, (3) :359 – 360, 1996.